I Mühazirə

Proyektiv həndəsənin yaranması. Proyektiv fəzanın aksiomatik qurulması. Üçölçülü proyektiv fəzada nöqtələr, düz xətlər və müstəvilər

Proyektiv həndəsə XIX əsrin birinci yarısında Fransada yaranmışdır. Bu elmin yaranması fransız riyaziyyatçısı Ponselenin (1788-1867) adı ilə bağlıdır.

Tutaq ki, bizə hər hansı K meydanı üzərində $(n+1)$ ölçülü V vektor fəzası verilir. V' ilə fəzanın $V/\left\{\vec{o}\right\}$ vektorları çoxluğunu işarə edək. Hər hansı boş olmayan P çoxluğu üçün aşağıdakı iki şərti (aksiomu) ödəyən $f:V \rightarrow P$ inikası varsa, onda P çoxluğuna V vektor fəzasının doğurduğu n-ölçülü proyektiv fəza deyilir.

I. $f:V' \rightarrow P$ süryektivdir, yəni P çoxluğunun hər bir nöqtəsi müəyyən bir $\vec{x} \in V$ vektorunun obrazıdır.

II. İxtiyari $\vec{x}, \vec{y} \in V'$ vektorları üçün $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ bərabərliyi yalnız və yalnız $\vec{x}$ və $\vec{y}$ vektorları kolleniar olduqda doğrudur.

P çoxluğunun elementlərinə proyektiv fəzanın nöqtələri deyilir və latın əlifbasının baş hərfləri $A, B, C, ..., X, Y, ...$ və s. işarə edilir.

Əgər $f(\vec{x}) = X$ olarsa, deyəcəyik ki, $\vec{x}$ vektoru X nöqtəsini doğurur. II aksiomdan alınır ki, V vektor fəzasının P proyektiv fəzasının eyni bir nöqtəsini doğuran bütün vektorları çoxluğu, sıfır vektoru istisna olmaqla, birölçülü altfəzadır. Kolleniar olmayan vektorlar isə müxtəlif nöqtələri doğururlar.

Bu səbəbdən də K meydanı sıfır xarakteristikalı meydan (sonsuz sayda elementi olan meydan) olduqda, P proyektiv fəzası da sonsuz sayda nöqtəyə malikdir. K meydanı sonlu meydan olduqda isə P proyektiv fəzada da sonlu sayda nöqtə olar.

Şərtləşək ki, bundan sonra biz yalnız R həqiqi ədədlər meydanı üzərində olan V vektor fəzaların doğruluğu proyektiv fəzalara baxacağıq.

Tutaq ki, P üçölçülü proyektiv fəzadır. Onda P fəzasını doğuran V vektor fəzası dördölçülü olacaq.

Dördölçülü V vektor fəzanın üçölçülü L_3 alt vektor fəzasının doğruluğu bütün nöqtələr çoxluğuna P fəzasında proyektiv müstəvi, L_2 alt ikiölçülü fəzasının doğurduğu nöqtələr çoxluğu isə proyektiv düz xətt adlanır. L_1 birölçülü altfəzasının doğurduğu çoxluğun isə nöqtə olduğunu demişdik.

L_2 və L_3 alt vektor fəzalarında cüt –cüt kolleniar olmayan sonsuz sayda vektorlar olduğundan, proyektiv düz xətt və proyektiv müstəvi üzərində sonsuz sayda nöqtə vardır. Üçölçülü proyektiv fəzada bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtənin, bir proyektiv müstəvi üzərində olmayan dörd nöqtənin varlığını göstərmək olar.

Doğrudan da, P üçölçülü proyektiv fəzanı doğuran dördölçülü V vektor fəzasında, onun bazisi olan dörd $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektorları vardır. Bu vektorların doğruluğu dörd A, B, C və D nöqtələri bir proyektiv müstəvi üzərində deyillər. Bundan başqa onlardan istənilən üç dənəsi bir proyektiv düz xətt üzərində ola bilməzlər.

Bunu isbat edək. Əksini fərz edək. A, B, və C nöqtələri bir proyektiv düz xəttə aiddirlər. Onda bu nöqtələri doğuran $\vec{a}, \vec{b}$, və $\vec{c}$ vektorları ikiölçülü L_2 vektor fəzasına daxildirlər. Bu isə $\vec{a}, \vec{b}$, və $\vec{c}$ vektorlarının xətti asılı olmadıqlarına ziddir.

İsbat edəcəyimiz aşağıdakı xassələr üçölçülü proyektiv fəzanın, proyektiv müstəvinin və proyektiv düz xəttin tərifindən alınır.

Xassə 1. İstənilən iki A və B nöqtələrindən yalnız və yalnız bir proyektiv düz xətt keçir.

İsbatı. Fərz edək ki, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları A və B nöqtələrini doğururlar. Onda $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kolleniar ola bilməzlər. Deməli, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının doğruluğu $L(\vec{a}, \vec{b})$ vektor fəzası ikiölçülü vektor altfəzasıdır. $L(\vec{a}, \vec{b})$ altfəzası müəyyən bir ℓ proyektiv düz xəttini doğurur. A və B nöqtələrininin hər ikisi ℓ proyektiv düz xəttinin üzərində olacaq.

İndi göstərək ki, A və B nöqtələrindən keçən yeganə proyektiv düz xətdir. Əgər ℓ' A və B nöqtələrindən keçən başqa bir düz xətt, L_2' isə bu düz xətti doğuran altfəza olarsa, onda $\vec{a} \in L_2'$ və $\vec{b} \in L_2'$ olar. Onda $L(\vec{a}, \vec{b})$ və L_2' altfəzaları üst-üstə düşəcəklər. Deməli, ℓ və ℓ' düz xətləri də üst –üstə düşəcəklər.

Xassə isbat olundu.

Analoji olaraq aşağıdakı xassəni də isbat etmək olar.

Xassə 2. Üçölçülü proyektiv fəzada bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən yalnız və yalnız bir proyektiv müstəvi keçir**.**

Xassə 3. Əgər iki A və B müxtəlif nöqtələri π proyektiv müstəvisinə aiddirsə, onda bu nöqtələrdən keçən AB düz xətti də π müstəvisinə aiddir.

İsbatı. Fərz edək ki, π proyektiv müstəvisinin doğuranı W üçölçülü vektor fəzasıdır, A və B nöqtələrinin doğuranları isə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarıdır.

$L(\vec{a}, \vec{b})$ ikiölçülü vektor fəzası AB düz xəttinin doğuranı olacaq. $\vec{a} \in W,\ \vec{b} \in W$ olduğundan $L(\vec{a}, \vec{b}) \subset W$ olar. Tutaq ki, M nöqtəsi AB düz xəttinin ixtiyari nöqtəsi, $\vec{m}$ vektoru isə M nöqtəsinin doğuranıdır. $\vec{m} \in L\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ olduğundan $\vec{m} \in W$ olar. Buradan çıxır ki, $M \in \pi$ olur.

Xassə isbat olundu.

Xassə 4. Bir proyektiv müstəvi üzərində yerləşən iki proyektiv düz xətt kəsişir.

İsbatı. Fərz edək ki, a və b düz xətləri σ müstəvisi üzərində yerləşən ixtiyari iki proyektiv düz xətdirlər. L_2, L_2' və W vektor fəzaları uyğun olaraq bu proyektiv düz xətləri və σ müstəvisini doğuran altfəzalardırlar. $a \subset \sigma$ və $b \subset \sigma$ olduğu üçün $L_2 \subset W$ və $L_2' \subset W$ olar. L_2 və L_2' fəzaları W üçölçülü vektor fəzasının müxtəlif ikiölçülü vektor altfəzaları olduqlarından, cəbrdən məlum olan teoremə əsasən L_2 və L_2' fəzalarının birölçülü ortaq altfəzaları vardır. Həmin birölçülü altfəzanın doğurduğu nöqtə isə a və b proyektiv düz xətlərinin ortaq nöqtəsi olar. Xassə isbat olundu.

Xassə5. Üçölçülü proyektiv fəzada ixtiyari proyektiv müstəvi ilə, onun üzərində yerləşməyən proyektiv düz xəttin yalnız və yalnız bir ortaq nöqtəsi vardır.

Xassə 6. Üçölçülü proyektiv fəzada ixtiyari iki müxtəlif proyektiv müstəvinin, onların ortaq nöqtələrindən ibarət olan yalnız və yalnız bir ortaq düz xətti vardır.

5-ci və 6-cı xassələrin isbatı oxucuya çatdırılır.

II Mühazirə

Proyektiv müstəvi və proyektiv düz xətt üzərində nöqtələrin proyektiv koordinatları, modellər

Tərif 1. Tutaq ki, $n\,(n \geq 2)$ ölçülü proyektiv fəzada $B_1, B_2, \dots, B_k \quad (k \geq 3)$ kimi K nöqtə verilmişdir. Əgər bu nöqtələrin istənilən 3-ü bir proyektiv düz xətt üzərində yerləşmirsə, onda deyirlər ki, $B_1, B_2, \dots, B_k$ nöqtələri ümumi vəziyyətdədirlər.

Tərif 2. σ proyektiv müstəvisində ümumi vəziyyətdə olan, nizamlanmış $A_1\, A_2, A_3, E$ nöqtələri sisteminə proyektiv reper və ya proyektiv müstəvidə proyektiv koordinat sistemi deyilir, $R = (A_1, A_2, A_{3,}\, E)$ ilə işarə edilir.

$A_1, A_2, A_3,$ nöqtələrinə reperin təpə nöqtələri, E nöqtəsinə reperin vahid nöqtəsi, $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_1A_3$ düz xətlərinə isə koordinat düz xətləri deyilir.

Əgər reperin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3$ və $\vec{e}$ vektorları $\vec{a}_1, + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{e}$ şərtini ödəməklə seçiliblərsə, onda $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3,\ \vec{e}$ vektorları sisteminə $R = (A_1,\ A_2,\ A_{3,}\ E)$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi deyilir.

Göstərək ki, verilmiş reperə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi həmişə vardır. $\vec{b}_1, \vec{b}_2\ \vec{b}_3,\ \vec{e}$ vektorları uyğun olaraq $A_1\ A_2, A_3,$ və E nöqtələrini doğuran vektorlar olsunlar. $A_1\ A_2, A_3,$ nöqtələri bir proyektiv düz xətt üzərində olmadıqlarından, $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ və $\vec{b}_3$ vektorları bir ikiölçülü vektor fəzaya aid ola bilməzlər.

Deməli, $\vec{b}_1, \vec{b}_2\ \vec{b}_3$ vektorları komplonar olmadıqlarından, onları σ proyektiv müstəvisini doğuran üçölçülü vektor fəzanın bazis vektorları kimi qəbul edə bilərik. Onda heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ həqiqi ədədləri var ki,

$$\vec{e} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \lambda_3 \vec{b}_3 \tag{2}$$

$\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{b}_1,\ \vec{a}_2 = \lambda_2 \vec{b}_2,\ \vec{a}_3 = \lambda_3 \vec{b}_3$ vektorları da $A_1\ A_2, A_3,$ nöqtələrini doğururlar.

Beləliklə, biz $A_1\ A_2, A_3, E$ nöqtələrini doğuran və (1) şərtini ödəyən $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlar sistemini aldıq.

Əgər λ sıfırdan fərqli hər hansı həqiqi ədəd olarsa, (1) bərabərliyinin hər tərəfini λ-ya vurmaqla

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \lambda \vec{e}$$

bərabərliyini alarıq. $\lambda \vec{a}_1, \lambda \vec{a}_2\ \lambda \vec{a}_3,\ \lambda \vec{e}$ vektorları sistemi də R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar. Buradan çıxır ki, verilmiş reperə nəzərən sonsuz sayda əlaqəli vektorlar sistemi vardır.

Teorem 1. Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3,\ \vec{e}$ və $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2\ \vec{a}'_3,\ \vec{e}'$ vektorlar sisteminin hər biri $R = (A_1,\ A_2,\ A_3,\ E)$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi isə onda elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki,

$$\vec{a}'_1 = \lambda\,\vec{a}_1,\ \vec{a}'_2 = \lambda\,\vec{a}_2,\ \vec{a}'_3 = \lambda\,\vec{a}_3,\ \vec{e}' = \lambda\,\vec{e} \qquad (3)$$

olur.

İsbatı. $\vec{a}'_1$ və $\vec{a}_1$ vektorları eyni bir A_1 nöqtəsini doğurduqlarından elə bir $\lambda_1 \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a}'_1 = \lambda_1\,\vec{a}_1$. Analoji olaraq elə $\lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0,\ \lambda_4 \neq 0$ həqiqi ədədləri var ki, $\vec{a}'_2 = \lambda_2\,\vec{a}_2,\ \ \vec{a}'_3 = \lambda_3\,\vec{a}_3,\ \ \vec{e}' = \lambda_4\,\vec{e}$.

$\vec{a}'_1, \vec{a}'_2\ \vec{a}'_3,\ \vec{e}'$ vektorları R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olduqlarından $\vec{a}'_1 +, \vec{a}'_2 + \vec{a}'_3 = \vec{e}'$ bərabərliyindən $\lambda_1\,\vec{a}_1 + \lambda_2\,\vec{a}_2 + \lambda_3\,\vec{a}_3 = \lambda_4\,\vec{e}$ bərabərliyini alarıq. Axırıncı bərabərliyin hər tərəfini λ_4 - ə bölsək

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_4}\vec{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_4}\vec{a}_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4}\vec{a}_3 = \vec{e} \qquad (4)$$

alarıq.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3$ vektorları proyektiv müstəvini doğuran üçölçülü vektor fəzanın bazis vektorları olduqlarından,

$\vec{e}$ vektorunun bu bazis vektorların üzrə ayrılışı yeganədir. Onda (4) və (1) bərabərliklərindən alarıq ki,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 1,\ \ \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 1,\ \ \frac{\lambda_3}{\lambda_4} = 1,$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ alınır. Bununla da (3) bərabərliklərinin doğruluğu isbat olundu.

İndi də, proyektiv müstəvi üzərində verilmiş proyektiv koordinat sistemində nöqtənin koordinatı anlayışını verək.

Fərz edək ki, X nöqtəsi proyektiv müstəvinin ixtiyari nöqtəsidir. Bu müstəvi üzərində $R = (A_1,\ A_2,\ A_3,\ E)$ proyektiv reperi verilmişdir. X nöqtəsini doğuran ixtiyari $\vec{x}$ vektoruna və R reperinə nəzərən nəzərən əlaqəli

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlar sisteminə baxaq. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlarını σ müstəvisini doğuran üçölçülü V vektor fəzasının bazis vektorları qəbul edək. $\vec{x}$ vektorunun bu bazisə üzrə ayrılışını yazaq.

$$\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 \tag{5}$$

Müəyyən nizamla götürülmüş x_1, x_2, x_3 ədədlərinə X nöqtəsinin R reperində proyektiv koordinatları deyilir, $X(x_1, x_2, x_3)$ və ya $X(x_1, x_2, x_3)_R$ kimi işarə edilir. x_1-ə X nöqtəsinin birinci, x_2-yə ikinci, x_3ə isə üçüncü proyektiv koordinatı deyilir. $\vec{x} \neq 0$ olduğundan x_1, x_2 və x_3 koordinatlarının üçü də birdən sıfra bərabər ola bilməz.

Qeyd etmək lazımdır ki, X nöqtəsinin koordinatları bu nöqtəni doğuran $\vec{x}$ vektorunun seçilməsindən və R reperinə nəzərən əlaqəli $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorlarının seçilməsindən asılıdır. Bu asılılığın xarakterini aydınlaşdıraq. Tutaq ki, $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3', \vec{e}'$ vektorları R reperinə nəzərən başqa əlaqəli vektorlar sistemidir. $\vec{x}'$ isə X nöqtəsini doğuran başqa bir vektordur. $\vec{x}$ və $\vec{x}'$ vektorları eyni bir nöqtəni doğurduqlarından olduqlarından elə $\mu \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{x}' = \mu \vec{x}$ olur. Bundan qabaq isbat etdiyimiz teoremə görə elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a}_1' = \lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2' = \lambda \vec{a}_2, \vec{a}_3' = \lambda \vec{a}_3$

X nöqtəsinin yeni seçilmiş əlaqəli vektorlar sisteminə nəzərən $(x_1', x_2', x_3',)$ olsun. Onda

$$\vec{x}' = x_1' \vec{a}_1' + x_2' \vec{a}_2' + x_3' \vec{a}_3'$$

Yuxarıda deyilənləri bu bərabərlikdə nəzərə alsaq alarıq:

$$\mu \vec{x}' = x_1' \lambda \vec{a}_1' + x_2' \lambda \vec{a}_2' + x_3' \lambda \vec{a}_3'$$

Bu bərabərliyin hər tərəfini μ ədədinə bölsək

$$\vec{x} = \frac{\lambda}{\mu} x_1' \vec{a_1} + \frac{\lambda}{\mu} x_2' \vec{a_2} + \frac{\lambda}{\mu} x_3' \vec{a_3} \qquad (6)$$

Bu bərabərliyi (5) bərabərliyi tutuşduraq.

$$x_1 = \frac{\lambda}{\mu} x_1', \quad x_2 = \frac{\lambda}{\mu} x_2', \quad x_3 = \frac{\lambda}{\mu} x_3', \quad \frac{\lambda}{\mu} \neq 0$$

alarıq.

Beləliklə, alırıq ki, proyektiv müstəvidə verilmiş proyektiv reperə nəzərən müstəvinin hər bir nöqtəsinin koordinatları sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin edilir.

Yəni əgər (x_1, x_2, x_3) ədədləri (x_1, x_2, x_3) ədədlərinin üçü də birdən sıfır deyil) hər hansı bir nöqtənin $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperində koordinatlarıdırsa, onda ixtiyari λ_0 ədədi üçün $(\lambda_0 x_1, \lambda_0 x_2, \lambda_0 x_3)$nizamlı ədədləri də həmin nöqtənin $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperinə nəzərən koordinatları dır.

$R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin bu reperə nəzərən koordinatları $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$, $E(1, 1, 1)$ olar.

Teorem 2. Əgər σ proyektiv müstəvisində $X \in \sigma$ nöqtəsinin R reperinə nəzərən koordinatları (x_1, x_2, x_3) olarsa, $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{\ell}$ vektorları R reperinə nəzərən ədaqəli vektorlar sistemidirsə, onda $\vec{y} = x_1 \vec{a_1'} + x_2 \vec{a_2'} + x_3 \vec{a_3'}$ vketoru da X nöqtəsini doğurur.

İsbatı. Əgər (x_1, x_2, x_3) ədədləri $X \in \sigma$ nöqtəsinin R reperində koordinatlarıdırsa, onda R reperinə nəzərən əlaqəli $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}, \vec{e}$ vektorlar sistemi var ki, $\vec{x} = x_1 \vec{a_1} + x_2 \vec{a_2} + x_3 \vec{a_3}$ vektoru X nöqtəsini doğurur. 1-ci teoremə əsasən elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a_1'} = \lambda \vec{a_1}$, $\vec{a_2'} = \lambda \vec{a_2}$, $\vec{a_3'} = \lambda \vec{a_3}$, $\vec{e'} = \lambda \vec{e}$. Onda

$$\vec{y} = x_1 \vec{a_1'} + x_2 \vec{a_2'} + x_1 \vec{a_1'} = x_1 \lambda \vec{a_1} + x_2 \lambda \vec{a_2} + x_3 \lambda \vec{a_3} =$$
$$= \lambda \left(x_1 \vec{a_1} + x_2 \vec{a_2} + x_3 \vec{a_3} \right) = \lambda \vec{x}$$

Deməli, $\vec{y} = \lambda \vec{x}$. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{y}$ vektoru da X nöqtəsini doğurur. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Proyektiv müstəvidə R reperində koordinatları ilə verilmiş

$$X(x_1,\, x_2,\, x_3),\quad Y(y_1,\, y_2,\, y_3),\quad Z(z_1,\, z_2,\, z_3)$$

nöqtələrinin bir düz xətt üzərində olması üçün zəruri və kafi şərt

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{olmasıdır.}$$

İsbatı: Tutaq ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemidir.

Onda 2-ci teoremə əsasən $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3$, $\vec{z} = z_1\vec{a}_1 + z_2\vec{a}_2 + z_3\vec{a}_3$ vektorları uyğun olaraq X, Y və Z nöqtələrini doğururlar. Üç $\vec{x}, \vec{y}$ və $\vec{z}$ vektorlarının komplanar olması üçün onların xətti asılı olmaları zəruri və kafi şərtdir. Üç vektorun komplanarlığı şərti isə məhz $(*)$ bərabərliyinin ödənməsidir. Teorem isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə çıxır.

Nəticə. Proyektiv müstəvidə $R = (A_1,\, A_2,\, A_3,\, E)$ reperində koordinatları ilə verilmiş $X(x_1,\, x_2,\, x_3)$ nöqtəsinin A_1A_2 koordinat düz xətti üzərində olması üçün zəruri və kafi şərt $x_3 = 0$ olması, A_1A_3 koordinat düz xətti üzərində olması üçün zəruri kafi şərt $x_2 = 0$ olması, A_2A_3 koordinat düz xətti üzərində olması üçün zəruri və kafi şərt $x_1 = 0$ olmasıdır.

İndi də proyektiv müstəvidə koordinat sisteminin tərifinə analoji olaraq proyektiv düz xətt üzərində koordinat sisteminə tərif verək.

Tərif 3. Proyektiv düz xəttin müəyyən nizamla götürül-müş üç müxtəlif A_1, A_2, E nöqtələri sisteminə proyektiv düz xətt üzərində proyektiv reper deyilir və $R = (A_1,\, A_2,\, E)$ ilə işarə edilir. A_1, A_2 nöqtələrinə reperin nöqtələri, E nöqtəsinə isə vahid nöqtə deyilir.

A_1, A_2, E nöqtələrini doğuran $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{e}$ vektorları $\vec{a_1}+\vec{a_2}=\vec{e}$ şərtini ödədikdə onlara R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi deyilir. Proyektiv müstəvidə olduğu kimi, isbat etmək olur ki, R reperinə nəzərən əlaqəli sistemi sonsuz saydadır. Əgər $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{e}$ və $\vec{a_1'}, \vec{a_2'}, \vec{e'}$ vektorları R reperinə nəzərən iki əlaqəli vektorlar sistemi isə elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $\vec{a_1'} = \lambda \vec{a_1}$, $\vec{a_2'} = \lambda \vec{a_2}$, $\vec{e'} = \lambda \vec{e}$ olur.

Üzərində $R=(A_1, A_2, E)$ reperi verilmiş ℓ düz xəttinin hər hansı X nöqtəsini götürək.

X nöqtəsini doğuran hər hansı $\vec{x}$ vektorunu və R reperinə nəzərən əlaqəli $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{e}$ vektorlar sistemini qeyd edək. ℓ düz xəttini doğuran L ikiölçülü fəzanın bazis vektorları uyğun olaraq $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ vektorlarını qəbul edək. $\vec{x}$ vektorunun $\vec{a_1}$ və $\vec{a_2}$ bazis vektorları üzrə ayrılışını $\vec{x} = x_1 \vec{a_1} + x_2 \vec{a_2}$ yazaq. Onda nizamla götürülmüş x_1, x_2 ədədlərinə X nöqtəsinin koordinatları deyilir və $X(x_1, x_2)$ ilə işarə olunur. Proyektiv müstəvidə olduğu kimi, proyektiv düz xətt üzərində də nöqtənin proyektiv koordinatları sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin olunur.

$R=(A_1, A_2, E)$ reperində təpə nöqtələrin və vahid nöqtənin koordinatları $A_1(1,0)$, $A_2(0,1)$ və $E(1,1)$ olur.

n-ölçülü $n \geq 1$ proyektiv fəzanı, elementləri nöqtələr adlanan boş olmayan elə P çoxluğu kimi təyin etdik ki, bu çoxluq $(n+1)$ - ölçülü V vektor fəzasının sıfırdan fərqli vektorları çoxluğunun P çoxluğuna kolleniar vektorları eyni bir nöqtəyə, kolleniar olmayan vektorları isə müxtəlif nöqtələrə keçirən syurektiv inikas vasitəsilə alınıb.

Bu zaman P çoxluğunun elementlərinin təbiəti haqqında heç nə deyilmir. $f: V' \to P$ inikası üzərinə də süryektivlikdən başqa heç bir tələb qoyulmur.

Əgər elementləri müəyyən olan P çoxluğu və müəyyən n ölçülü proyektiv fəzanın aksiomlarını ödəyən $f : V^{'} \to P$ inikası tapılarsa, onda deyəcəyik ki, verilmiş aksiomlar sisteminin interperetasiyası qurulmuşdur. P çoxluğunun özünə n ölçülü proyektiv fəzanın modeli deyilir.

Təbii olaraq n-ölçülü P proyektiv fəzasının modeli olaraq $(n+1)$ - ölçülü V vektor fəzasının bütün birölçülü altfəzaları çoxluğunu götürmək olar. Hər bir $\vec{x} \in V^{'}$ vektoruna qarşı onun V fəzasında doğurduğu birölçülü altfəzanı qoyan f inikası Veylin 1-ci və 2-ci aksiomlarını ödəyər.

III Mühazirə

Proyektiv müstəvi üzərində və və proyektiv düz xətdə nöqtələrin koordinatlarının çevirməsi

Fərz edək ki, σ proyektiv müstəvisində iki $R = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{E})$ və $R' = (\mathrm{A}_1^{'}, \mathrm{A}_2^{'}, \mathrm{A}_3^{'}, \mathrm{E}^{'})$ reperləri verilib və $R^{'}$ reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin R reperinə nəzərən koordinatları məlumdur:

$\mathrm{A}_1^{'}(a_{11}, a_{21}, a_{31})_R$, $\mathrm{A}_2^{'}(a_{12}, a_{22}, a_{32})_R$, $\mathrm{A}_3^{'}(a_{13}, a_{23}, a_{33})_R$ və $\mathrm{E}'(a_{10}, a_{20}, a_{30})_R$.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \tag{1}$$

matrisinə R reperindən $R^{'}$ reperinə keçid matrisi deyilir. Əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3, e$ vektorlar sistemi R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olarsa, onda

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^{'} &= a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2 + a_{31}\vec{a}_3 \ , \\ \vec{a}_2^{'} &= a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2 + a_{31}\vec{a}_3 \ , \\ \vec{a}_3^{'} &= a_{13}\vec{a}_1 + a_{23}\vec{a}_2 + a_{33}\vec{a}_3 \ , \\ \vec{e}_1 &= a_{10}\vec{a}_1 + a_{20}\vec{a}_2 + a_{30}\vec{a}_3 \ , \end{aligned} \tag{2}$$

vektorları R' reperinin A_1', A_2', A_3' təpə nöqtələrini və E' vahid nöqtəsini doğuran vektorlar olacaqlar. (2) bərabərliklərindən alırıq:

$$\begin{aligned} \vec{a_1'} + \vec{a_2'} + \vec{a_3'} - \vec{e'} &= \left(a_{11} + a_{12} + a_{13} - a_{10}\right)\vec{a}_1 + \\ + \left(a_{21} + a_{22} + a_{23} - a_{20}\right)\vec{a}_2 &+ \left(a_{31} + a_{32} + a_{33} - a_{30}\right)\vec{a}_3 \end{aligned} \tag{3}$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar σ proyektiv müstəvisini doğuran üçölçülü vektor fəzasında xətti asılı olmayan vektorlar olduqlarından, $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3', \vec{e}'$ vektorlar sistemi R' reperinə nəzərən yalnız və yalnız onda əlaqəli vektorlar sistemi olar ki, (2) matrisinin birinci üç sütununun cəmi onun dördüncü sütununa bərabər olsun. Bu halda (1) matrisinin sütunlarına əlaqəli sütunlar deyəcəyik.

Əgər R reperindən R' reperinə (1) keçid matrisinin sütunları əlaqəli olmazlarsa, onda bu matrisin birinci sütununu k_1 ədədinə, ikinci sütununu k_2 ədədinə üçüncü sütununu k_3 ədədinə vurmaqla onlar

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = a_{10} \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 = a_{20} \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 = a_{30} \end{cases} \tag{4}$$

(4) tənliklər sisteminin həlli kimi təyin edə bilərik. Proyektiv koordinat sistemində nöqtənin koordinatları sabit ədədi vuruq dəqiqliyi ilə təyin olunduğundan.

$$\begin{pmatrix} k_1a_{11} & k_2a_{12} & k_3a_{13} & a_{10} \\ k_1a_{21} & k_2a_{22} & k_3a_{23} & a_{20} \\ k_1a_{31} & k_2a_{23} & k_3a_{33} & a_{30} \end{pmatrix} \tag{5}$$

matrisi də R reperindən R' reperinə keçid matrisi olacaq. Bu matrisin sütunları əlaqəlidir.

(4) tənliklər sistemi haqqında onu qeyd edək ki, A_1', A_2', A_3' nöqtələri bir düz xətt üzərində olmadıqlarından

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

olar.

Deməli (4) sisteminin yeganə həlli var. Həm də $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$ və $k_3 \neq 0$ olar. Çünki əgər məsələn $k_1 = 0$ olarsa, onda E' nöqtəsi $A_2'A_3'$ koordinat düz xətti üzərində olar. Bu isə $R' = (A_1', A_2', A_3', E')$-in reper olması şərtinə ziddir. Eyni qayda ilə $k_2 \neq 0$ və $k_3 \neq 0$. Beləliklə, R reperindən R' reperinə (5) keçid matrisinin sütunları əlaqəlidirlər.

İndi proyektiv müstəvidə müstəvidə koordinatların çevrilməsi məsələsinə keçək.

Məsələ 1. Proyektiv müstəvidə R və R' reperləri, R reperindən R' reperinə sütunları əlaqəli olan (1) keçid matrisi və proyektiv müstəvisinin R və R' reperlərində koordinatları uyğun olaraq $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ və $(x_1',\ x_2',\ x_3')$ olan ixtiyari X nöqtəsi verilmişdir. $x_1,\ x_2,\ x_3$ koordinatlarını x_1', x_2', x_3' koordinatları ilə ifadə etmək tələb olunur.

Həlli. Tutaq ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \vec{a}_3, \vec{e}$ vektorları sistemi R reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemidir. Onda (2) bərabərlikləri ilə təyin olunan $\vec{a}_1',\ \vec{a}_2',\ \vec{a}_3',\ \vec{e}'$ vektorları R' reperinin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran vektorlardır. (1) keçid matrisinin sütunları əlaqəli olduğundan $\vec{a}_1',\ \vec{a}_2',\ \vec{a}_3'$ və $\vec{e}'$ vektorları R' reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar.

Fərz edək ki, $\vec{y}$ vektoru X nöqtəsini doğuran hər hansı bir vektordur. (y_1, y_2, y_3) bu vektorun $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisində, (y_1', y_2', y_3') isə $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'$ bazisində koordinatlarıdır

Onda

$$\begin{aligned} \vec{y} &= y_1 \vec{a}_1 + y_2 \vec{a}_2 + y_3 \vec{a}_3 \\ \vec{y} &= y_1' \vec{a}_1' + y_2' \vec{a}_2' + y_3' \vec{a}_3' \end{aligned} \tag{6}$$

(2) və (6) bərabərliklərindən alarıq:

$$\begin{aligned}\vec{y} &= y_1'\vec{a_1}+y_2'\vec{a_2}+y_3'\vec{a_3} = y_1'\left(a_{11}\vec{a_1}+a_{21}\vec{a_2}+a_{31}\vec{a_3}\right)+\\ &+y_2'\left(a_{12}\vec{a_1}+a_{22}\vec{a_2}+a_{32}\vec{a_3}\right)+y_3'\left(a_{13}\vec{a_1}+a_{23}\vec{a_2}+a_{33}\vec{a_3}\right)=\\ &=\left(a_{11}y_1'+a_{12}y_2'+a_{13}y_3'\right)\vec{a_1}+\left(a_{21}y_1'+a_{22}y_2'+a_{23}y_3'\right)\vec{a_2}+\\ &+\left(a_{31}y_1'+a_{32}y_2'+a_{33}y_3'\right)\vec{a_3}=y_1\vec{a_1}+y_2\vec{a_2}+y_3\vec{a_3}\end{aligned} \tag{7}$$

Buradan isə alarıq:

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}y_1'+a_{12}y_2'+a_{13}y_3'\\ y_2 &= a_{21}y_1'+a_{22}y_2'+a_{23}y_3'\\ y_3 &= a_{31}y_1'+a_{32}y_2'+a_{33}y_3'\end{aligned} \tag{8}$$

(y_1, y_2, y_3) və (x_1, x_2, x_3) X nöqtəsinin R reperində koordinatları olduqlarından elə $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1 = \lambda x_1,\ y_2 = \lambda x_2,\ y_3 = \lambda x_3$ olar. (y_1', y_2', y_3') və $(x_1', x_2'\ x_3')$ X nöqtəsinin R' reperində də koordinatları olduqlarından elə $\lambda' \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1' = \lambda x_1',\ y_2' = \lambda x_2',\ y_3' = \lambda x_3'$ olar. Bu qiymətləri (8) də nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned}\lambda x_1 &= a_{11}\lambda' x_1'+a_{12}\lambda' x_2'+a_{13}\lambda' x_3'\\ \lambda x_2 &= a_{21}\lambda' x_1'+a_{22}\lambda' x_2'+a_{23}\lambda' x_3'\\ \lambda x_3 &= a_{31}\lambda' x_1'+a_{32}\lambda' x_2'+a_{33}\lambda' x_3'\end{aligned} \tag{9}$$

Bu bərabərliklərin hər tərəfini λ'- ə bölsək və $\frac{\lambda}{\lambda'} = \rho$ işarə etsək alarıq.

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3'\\ \rho x_2 &= a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3'\\ \rho x_3 &= a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3'\end{aligned} \tag{10}$$

(10) düsturlarına proyektiv müstəvidə koordinatların çevrilməsi düsturları deyilir. Biz $x_1, x_2,$ və x_3 koordinatlarını sabit vuruq dəqiqliyiilə tapdıq. Bu isə təbiidir, çünki proyektiv reper nöqtənin koordinatlarını sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin edir. (10) düsturlarını bir misal üzərində nəzərdən keçirək.

Misal. Proyektiv müstəvidə R reperindən R' reperinə

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

keçid matrisi verilmişdir. R reperindən R' reperinə keçiddə proyektiv koordinatların çevrilməsi düsturlarını yazın.

Həlli. Göründüyü kimi verilən keçid matrisinin sütunları uyğunlaşmış deyillər. Birinci sütunun elə k_1, ikinci k_2, üçüncü sütunu elə k_3 ədədinə vuraq ki,

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 1 \\ k_2 = 1 \\ -k_1 + k_3 = 2 \end{cases}$$

şərti ödənsin. Bu sistemdən $k_1 = -1,\ k_2 = 1$ və $k_3 = 1$ alarıq. Deməli, R reperindən R' reperinə keçid matrisinin sütunları əlaqəlidirlər.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

R reperindən R' reperinə keçiddə çevirmə düsturları

$$\begin{cases} \rho x_1 = -x_1' + 2x_2' \\ \rho x_2 = \qquad\quad x_2' \\ \rho x_3 = x_1' + \qquad\quad x_3' \end{cases}$$

olar.

İndi proyektiv düz xətt üzərində proyektiv koordinatların çevrilməsi məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, $\overline{d}$ proyektiv düz xətt üzərində $R = (A_1,\ A_2,\ E)$ və $R' = (A_1',\ A_2',\ ,\ E')$ reperləri verilir. R' reperinin təpə nöqtələrinin və vahid nöqtəsinin R reperində koordinatları məlumdur.

$$A_1'(a_{11},\ a_{21}),\quad A_2'(a_{12},\ a_{22}),\quad E'(a_{10},\ a_{20})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

matrisi R reperindən $R^{'}$ reperinə keçid matrisi adlanır. Əgər (11) matrisinin birinci iki sütununun elementləri cəmi onun üçüncü sütununa bərabər olarsa, onda bu matrisə sütunları əlaqəli matris deyəcəyik.

Məsələ 2. Proyektiv düz xəttin ixtiyari X nöqtəsinin bu proyektiv düz xətləri R və $R^{'}$ reperlərində koordinatları uyğun olaraq $(x_1,\ x_2)_R$ və $(x_1^{'},\ x_2^{'})_{R^{'}}$ -dir. Əgər R reperindən $R^{'}$ reperinə sütunları əlaqəli olan (7) keçid matrisi verilibsə, x_1 və x_2 koordinatlarını $x_1^{'},\ x_2^{'}$ koordinatları ilə ifadə edin.

Həlli: Əgər $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{e}$ vektorları R reperinə nəzərən vektorlar sistemidirsə, onda

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^{\,'} &= a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2^{\,'} &= a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2 \\ \vec{e}^{\,'} &= a_{10}\vec{a}_1 + a_{20}\vec{a}_2 \end{aligned} \qquad (12)$$

vektorları $R^{'}$ reperinin təpə nöqtələrini və vahid nöqtəsini doğuran vektorlar olacaq. (11) keçid matrisinin sütunları əlaqəli olduqlarından, $\vec{a}_1^{\,'},\ \vec{a}_2^{\,'},\ \vec{e}^{\,'}$ vektorları da $R^{'}$ reperinə nəzərən əlaqəli vektorlar sistemi olar.

Əgər X nöqtəsini doğuran hər hansı $\vec{y}$ vektorunun $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$ və $\vec{a}_1^{\,'},\ \vec{a}_2^{\,'}$ bazislərində koordinatları uyğun olaraq $(y_1,\ y_2)$ $(y_1^{'},\ y_2^{'})$ olarsa onda

$$\vec{y} = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 \quad \text{və} \quad \vec{y} = y_1^{'}\vec{a}_1^{\,'} + y_2^{'}\vec{a}_2^{\,'} \qquad (13)$$

(12) və (13) münasibətlərindən isə

$$\begin{aligned} \vec{y} &= y_1^{'}\vec{a}_1^{\,'} + y_2^{'}\vec{a}_2^{\,'} = y_1^{'}\left(a_{11}\vec{a}_1 + a_{21}\vec{a}_2\right) + y_2^{'}\left(a_{12}\vec{a}_1 + a_{22}\vec{a}_2\right) = \\ &= \left(a_{11}y_1^{'} + a_{12}y_2^{'}\right)\vec{a}_1 + \left(a_{21}y_1^{'} + a_{22}y_2^{'}\right)\vec{a}_2 = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 \end{aligned} \qquad (14)$$

alarıq. Burada isə

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}y_1^{'} + a_{12}y_1^{'} \\ y_2 &= a_{21}y_1^{'} + a_{22}y_2^{'} \end{aligned} \qquad (15)$$

$(y_1,\ y_2)$ və $(x_1,\ x_2)$ eyni bir R reperində X nöqtəsinin koordinatları olduqlarından $\lambda \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1 = \lambda x_1,\ y_2 = \lambda x_2$ olur. Analoji olaraq elə $\lambda^{'} \neq 0$ həqiqi ədədi var ki, $y_1^{'} = \lambda^{'} x_1^{'},\ y_2^{'} = \lambda^{'} x_2^{'}$. Bu münasibətləri (15) –də nəzərə alsaq.

$$\lambda x_1 = a_{11}\lambda^{'} x_1^{'} + a_{12}\lambda^{'} x_1^{'}$$
$$\lambda x_2 = a_{21}\lambda^{'} x_1^{'} + a_{22}\lambda^{'} x_2^{'}$$

olar.

Bu bərabərliklərin hər tərəfini $\lambda^{'}$ -ə bölüb, $\rho = \dfrac{\lambda}{\lambda^{'}}$ işarə etsək,

$$\begin{cases} \rho x_1 = a_{11} x_1^{'} + a_{12} x_2^{'} \\ \rho x_2 = a_{21} x_1^{'} + a_{22} x_2^{'} \end{cases} \qquad (16)$$

düsturlarını alarıq. (16) düsturlarına proyektiv düz xətt üzərində koordinatların çevrilməsi düsturları deyilir. Proyektiv müstəvidə olduğu kimi, burada da x_1 və x_2 koordinatların təbii olaraq sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin etdik.

IV Mühazirə

Düz xəttin tənlikləri. Düz xəttin koordinatları. İkilik Prinsipi.

Biz evklid fəzasında koordinat üsulu haqında bəhs etdiyimiz zaman Φ fiqurunu təyin edən şərtlər, haqqında xüsusi halda Φ fiqurunun tənliyi haqqında danışmışdıq.

Proyektiv fəzada da Φ fiqurunun tənliyi anlayışı analoji qayda ilə verilir.

Verilən reperdə Φ fiqurunun tənliyi elə bir tənliyə deyilir ki, Φ fiqurunun hər bir nöqtəsinin koordinatları bu tənliyi ödəyir, Φ fiquruna aid olmayan istənilən nöqtənin koordinatları bu tənliyi ödəmir.

Proyektiv müstəvidə də evklid müstəvisində olduğu kimi fiqur olaraq əsasən düz xətlərə baxılır. Biz də düz xəttin müxtəlif tənliklərini verəcəyik. Verilən iki nöqtədən keçən düz xəttin tənliyini çıxaraq.

Fərz edək ki, proyektiv müstəvidəki R reperində $\overline{d}$ düz xəttini iki $A(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ və $B(b_1,\ b_2,\ b_3)_R$ nöqtələri koordinatları ilə verilmişdir. $\overline{d}$ düz xəttinin ixtiyari $X(x_1, x_2, x_3)_R$ nöqtəsini götürək. A, B və X nöqtələri bir düz xətt üzərində olduqlarından §4-də 3cü teoremə əsasən

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

alarıq.

Bu isə $\overline{d}$ düz xəttinin tənliyidir.

A və B müxtəlif nöqtələr olduqlarından

$$\text{ranq}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 2 \qquad (2)$$

Deməli, (1) tənliyi yalnız və yalnız onda ödənər ki, determinatın birinci sütunu, onun ikinci və üçüncü sütunlarının xətti kombinasiyası olsun.

Yəni elə λ və μ (ikisi də birdən sıfra bərabər olmayan) həqiqi ədədləri var ki,

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

Bu tənliklər proyektiv müstəvidə düz xəttin parametrik tənlikləri adlanırlar. Onların mahiyyəti ondan ibarətdir ki, ikisi də birdən sıfra bərabər olmayan λ və μ ədədləri necə olurlarsa, olsunlar (3) tənliklərindən alınan x_1, x_2, x_3 ədədləri (1) tənliyini ödədiyi üçün koordinatları (x_1, x_2, x_3) olan nöqtə $\overline{d}$ düz xətti üzərindədir.

Tərsinə koordinatları (x_1, x_2, x_3) olan nöqtə $\overline{d}$ düz xətti üzərindədirsə, onda həmişə elə λ və μ həqiqi ədədləri var ki, x_1, x_2, x_3 koordinatları (3) tənlikləri vasitəsi ilə a_1, a_2, a_3 və b_1, b_2, b_3 ədədləri ilə ifdə olunurlar.

(1) tənliyinin sol tərəfindəki determinatı birinci sütun elementlərinə görə açsaq.

$$x_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + x_1\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$ alarıq.

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ işarə etsək.

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (4)$$

(2) bərabərliyindən alınır ki, $u_1,\ u_2,\ u_3$ ədədlərindən heç olmazsa biri sıfırdan fərqli olmalıdır. Deməli, ixtiyari proyektiv reperdə düz xətt birdərəcəli bircins tənliklə verilir.

Bunun tərsi də doğrudur:

Teorem 1. Proyektiv müstəvidə birdərəcəli bircins (4) tənliyi ilə verilən fiqur proyektiv düz xətdir.

İsbatı. Fərz edək ki, $u_1 \neq 0$. Onda $P = (-u_2,\ u_1,\ 0)$ və $Q(-u_2,\ 0,\ u_1)$ nöqtələrinin koordinatları (4) tənliyini ödəyirlər. P və Q nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazaq:

$$\begin{vmatrix} x_1 & -u_2 & -u_3 \\ x_2 & -u_1 & 0 \\ x_3 & 0 & u_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ və ya } u_1^2\ x_1 + u_1u_2x_2 + u_1u_3x_3 = 0$$

Axırıncı tənliyin hər tərəfini u_1-ə bölsək, onda

$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ tənliyini alarıq. Deməli, P və Q nöqtələrindən keçən PQ düz xəttinin tənliyi (4) tənliyi ilə üst-üstə düşür. Teorem isbat olundu.

Fərz edək ki, bizə iki d_1 və d_2 düz xətləri

$$d_1 : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (5)$$

$$d_2 : \upsilon_1x_1 + \upsilon_2x_2 + \upsilon_3x_3 = 0 \qquad (6)$$

tənlikləri ilə verilmişlər.

Cəbr kursunda bircins tənliklər sisteminin əsas determinatının ranqı haqqında teoremdən birbaşa alınır ki,

Teorem 2. (5) və (6) tənlikləri ilə verilmiş düz xətlər yalnız və yalnız onda üst-üstə düşür ki,

$$\text{ranq}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \end{pmatrix} = 1$$

olsun. Buradan belə nəticə çıxır:

Nəticə. (5) və (6) tənlikləri ilə verilmiş düz xətlər yalnız və yalnız onda kəsişirlər ki,

$$\text{ranq}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \upsilon_1 & \upsilon_2 & \upsilon_3 \end{pmatrix} = 2$$

olsun.

Fərz edək ki, d düz xətti R reperində $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ tənliyi ilə verilmişdir. Onda u_1, u_2, u_3 ədədlərinə d düz xəttinin R reperində koordinatları deyilir və belə işarə edilir: $d(u_1, u_2, u_3)$ və ya $d(u_1, u_2, u_3)_R$. Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi düz xəttin koordinatlarının üçü də eyni zamanda sıfır ola bilməz. Həm də ki, R reperində düz xəttin koordinatları sabit vuruq dəqiqliyi ilə təyin olunur. Proyektiv müstəvidə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reprində koordinat düz xətlərinin tənlikləri və koordinatları aşağıdakı kimi olur.

$$\begin{array}{ll} A_1A_2 : x_3 = 0 & \qquad A_1A_2(0,\ 0,\ 1) \\ A_1A_3 : x_2 = 0 & \qquad A_1A_3(0,\ 1,\ 0) \\ A_2A_3 : x_1 = 0 & \qquad A_2A_3(1,\ 0,\ 0) \end{array}$$

Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipi proyektiv həndəsənin mühüm anlayışlarından biridir.

Nöqtə və düz xəttin qarşılıqlı aid olmaları münasibətini adətən belə ifadə edirik: «Nöqtə düz xəttin üzərindədir» və ya «düz xətt nöqtədən keçir». Bundan sonra biz bu münasibəti belə ifadə edəcəyik: «Nöqtə düz xəttə aiddir» və ya «düz xətt nöqtəyə aiddir».

Tutaq ki, $\pi^{'}$ çoxluğu π proyektiv müstəvisi üzərində bütün düz xətlər çoxluğudur. π müstəvisində R reperini götürək. Koordinatları ilə verilmiş hər bir $A(a_1,\ a_2,\ a_3)_R \in \pi$ nöqtəsinə R reperində eyni koordinatlara malik $m \in \pi^{'}$ düz xəttini qarşı qoysaq onda müəyyən bir $\varphi : \pi \to \pi^{'}$ inikasını alarıq. Göstərək ki, bu inikas biyeksiyadır. φ inikası $A(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ nöqtəsinə $m(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ düz xəttini qarşı qoyur. Əgər A və B nöqtələri π proyektiv müstəvisinin müxtəlif nöqtələri isə onların koordinatları mütənasib deyillər. Onda onlara qarşı qoyulan m və n düz xətlərinin də koordinatları mütənasib olmadıqlarından, bu düz xətlər onlarda müxtəlif düz xətlərdirlər. Deməli, φ inikası inyeksiyasıdır. Yəni müxtəlif nöqtələrə qarşı müxtəlif düz xətlər qoyulur. φ inikası həm də süryeksiyadır. Çünki, $\pi^{'}$ çoxluğunun hər bir düz xətti eyni koordinatlara malik olan nöqtənin obrazı olacaq. Beləliklə aldıq ki, φ inikası biyeksiyadır, yəni qarşılıqlı birqiymətli uyğynluqdur, $\varphi^{-1} : \pi^{'} \to \pi$ inikası düz xətlər çoxluğundan nöqtələr çoxluğuna biyeksiyadır.

Qeyd etmək lazımdır ki, φ və φ^{-1} inikasları nöqtələr və düz xətlər arasında «aid olmaq» münasibətini saxlayırlar: Yəni əgər $A \in d$ və $a^{'} = \varphi(A)$ isə onda $D^{'} = \varphi^{-1}(d)$ nöqtəsi $a^{'}$ düz xəttinə aid olar, $D^{'} \in a^{'}$. Həqiqətən, A nöqtəsi $(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ koordinatları ilə d düz xətti $(u_1,\ u_2,\ u_3)_R$ koordinatları ilə verilən $A \in d$ olduğundan

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0 \tag{1}$$

olar.

φ inikasının tərifinə görə $a^{'}$ düz xəttinin də koordinatları $(a_1,\ a_2,\ a_3)_R$ və $D^{'}$ nöqtəsinində koordinatları $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ olar. Yəni $a^{'}(a_1, a_2,\ a_3)$ və $D^{'}(u_1,\ u_2,\ u_3)$ olar. (1) bərabərliyi göstərir ki, $D^{'} \in a^{'}$ olur.

Bu təklifdən istifadə edərək aşağıdakı təklifin doğruluğunu isbat edək.

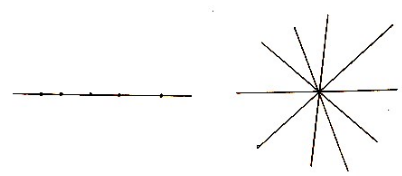
Təklif $A,\ B,\ C$ nöqtələri bir d düz xəttinə aid olarlarsa, onda

$$a = \varphi(A),\ \ b = \varphi(B),\ \ c = \varphi(C)$$

düz xətləri də bir $D=\varphi^{-1}(d)$ nöqtəsinə aid olarlar, başqa sözlə mərkəzi D nöqtəsi olan düz xətlər dəstəsinə aid olarlar.

İsbatı: Yuxarıda qeyd etdiyimizə görə $A\in d$ olduğundan $D\in a,\ B\in d$ olduğundan $D\in b,\ C\in d$ olduğundan $D\in C$ olar. Deməli, a, b, c düz xətləri mərkəzi D nöqtəsi olan düz xətlər dəstəsinə aiddirlər.

Bu təklifdən alınır ki, φ inikasında proyektiv müstəvinin bir düz xəttinə aid nöqtələri çoxluğu bir düz xətlər dəstəsinə keçir.



Şəkil 1

Tərsinə, φ^{-1} inikasında bir nöqtəyə aid düz xətlər dəstəsi bir düz xəttə aid nöqtələr çoxluğuna keçər.

İndi də proyektiv müstəvidə ikilik prinsipini ifadə edək.

İkilik prinsipi (müstəvidə). Əgər proyektiv müstəvidə nöqtələr, düz xətlər və onların qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı A təklifi doğrudursa, onda bu təklifdə «düz xətlər» sözünü «nöqtələr» sözü ilə, «nöqtələr» sözünü «düz xətlər» sözü ilə əvəz etdikdə alınan A^* təklifi də doğru olar.

A^* təklifinə A təklifi ilə ikili təklif deyilir. Proyektiv müstəvidə ikilik prinsipini əsaslandırmaq üçün , bu müstəvidə R reperini götürək və yuxarıda olduğu kimi φ və φ^{-1} inikaslarını quraq. Fərz edək ki, proyektiv müstəvinin nöqtələr və düz xətlərdən ibarət hər hansı Φ çoxluğu üçün nöqtə və düz xəttlərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı A təklifi doğrudur. Φ çoxluğunun φ inikasında bütün nöqtələrinin obrazlarından və φ^{-1} inikasında bütün düz xətlərini obrazlarından ibarət olan Φ^* işarə edək.

A tənliyinə qarşı Φ^* çoxluğuna daxil olan nöqtələr və düz xətlərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında A təklifindəki «nöqtələri düz xətlərlə, düz xətləri nöqtələrlə» əvəz etməkdən alınan A^* təklifini qarşı qoyaq. Aidliyi ifadə edən sözləri isə dəyişmədən saxladığımız üçün əgər A təklifi doğru olarsa onda A^* təklifi də doğru olar. Fikrimizi bir neçə misal üzərində aydınlaşdıraq.

Fərz edək ki, A təklifi belədir: 1. «İki nöqtə necə olur olsunlar, bu nöqtələrə aid olan bir düz xətt vardır».

Onda A^* təklifi belə olar. 1*. «İki düz xətt necə olur olsunlar bu düz xətlərə aid olan ancaq bir nöqtə vardır.»

Həqiqətən A təklifi doğrudur. Onunla ikili olan A^* təklifi də doğrudur.

2. Hər bir düz xəttə aid olan sonsuz sayda nöqtə vardır.

2*. Hər bir nöqtəyə aid olan sonsuz sayda düz xətt vardır.

3. Bir düz xəttə aid olmayan ən azı üç nöqtə vardır..

3*. Bir nöqtəyə aid olmayan ən azı üç düz xətt vardır.

İkilik prinsipi bir sıra teoremlərin isbatında istifadə olunur. Həmçinin qeyd etmək lazımdır ki, yuxarıda qurduğumuz φ və φ^{-1} inikasları proyektiv müstəvinin nöqtələri və düz xətləri arasındakı yeganə biyektiv inikaslar deyil. Biz gələcəkdə ikilik prinsipi üçün yararlı olan daha başqa inyektiv inikaslar quracayıq.

İndi də üçölçülü proyektiv fəzada ikilik prinsipi haqqında qısa məlumat verək. Proyektiv fəzada ikilik prinsipi belə ifadə olunur:

İkilik prinsipi (proyektiv fəzada). Əgər proyektiv fəzada nöqtələrin, düz xətlərin və müstəvilərin qarşılıqlı aid olmaları haqqında hər hansı B təklifi doğrudursa, onda bu təklifdə «nöqtələr» sözünü «müstəvilər» sözü ilə, «müstəviləri» sözünü «nöqtlər» sözü ilə əvəz etdikdə, qalan sözləri isə eyni ilə saxladıqda alnan B^* təklifi də doğru olar. Misallar göstərək.

1. Düz xətt və ona aid olmayan nöqtə üçün onların hər ikisinə aid olan yeganə müstəvi vardır.

1*. Düz xətt və ona aid olmayan müstəvi üçün, onların hər ikisinə aid olan yeganə nöqtə vardır.

2. İki nöqtə necə olur-olsun, onlra aid olan ancaq bir düz xətt vardır.

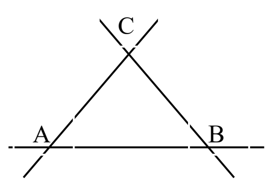
2*. İki müxtəlif müstəvi necə olurlarsa olsunlar, onlara aid olan ancaq bir düz xətt vardır.

V Mühazirə

Dezarq teoremi. Düz xəttin dörd nöqtəsinin və dəstənin dörd düz xəttinin mürəkkəb nisbətləri

1. Tərif. Bir proyektiv düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən və bu nöqtələri cüt-cüt birləşdirən üç düz xətdən ibarət olan həndəsi fiqura üçtəpəli deyilir.

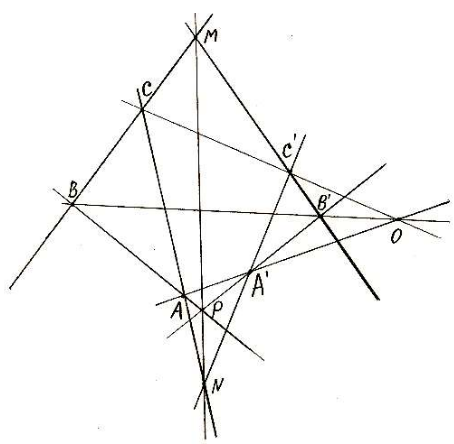
Nöqtələrə üçtəpəlinin təpə nöqtələri, düz xətlərə isə üçtəpəlinin tərəfləri deyilir. Təpələri A, B və C nöqtələri olan üçtəpəlini ABC ilə işarə edəcəyik.



Proyektiv müstəvidə iki ABC və $A'B'C'$ üçtəpəlilərini götürək. Fərz edək ki, bu üçtəpəlilərin təpə nöqtələri yazıldıqları kimi nizamlanmışlar. Onda A və A', B və B', C və C' təpələrinə bu üçtəpəlilərin uyğun təpələri, AB və BC və $B'C'$, AC və $A'C'$ tərəflərinə isə onların uyğun tərəfləri deyəcəyik.

Teorem 1. (Dezarq teoremi). Əgər iki üçtəpəlinin uyğun tərəflərindən keçən düz xətlər bir nöqtədən keçilirsə, (bir nöqtəyə aiddirlərsə), onda bu üçtəpəlilərin uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələri də bir düz xətt üzərində olar. (bir düz xəttə aid olar).

İsbatı. Fərz edək ki, ABC və $A'B'C'$ verilən üçtəpəlilərdir. O nöqtəsi AA', BB' və CC' düz xətlərinin hər üçnün kəsişdiyi nöqtələrdir. AB və $A'B'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni P ilə, AC və $A'C'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni N ilə BC və $B'C'$ tərəflərinin kəsişdiyi nöqtəni M ilə işarə edək (Şəkil 1).

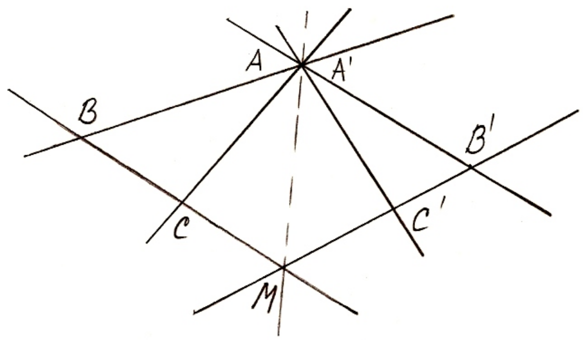


Şəkil 1

Əgər O nöqtəsi AB, BC və ya CA tərəflərinin birinə aid olarsa, onda teoremin hökmünün doğruluğu aşkardır. Beləki əgər $O \in AB$ olarsa, onda $A' \in OA,\ B' \in OB$ və $OA = OB = AB$ olduğundan alarıq ki, $A'B'$ tərəfi ilə AB tərəfi ilə üst-üstə düşər.

AC ilə $A'C'$-in kəsişdiyi nöqtə N, BC ilə $B'C'$-in kəsişdiyi nöqtə M olarsa da MN ilə AB düz xətti, bir P nöqtəsində kəsişər. P nöqtəsi isə AB və $A'B'$ tərəflərinin ortaq nöqtəsidir. Əgər bu üçtəpəlilərin bir cüt uyğun təpə nöqtələri, məsələn A və A', üst-üstə düşərsə yenə teoremini hökmü aşkardır.

Çünki, A nöqtəsi həm AB və $A'B'$ tərəflərinin, həm də AC və $A'C'$ tərəflərinin ortaq nöqtəsi olar, yəni N və P nöqtələri A nöqtəsi ilə üst-üstə düşər (Şəkil 2).



Şəkil 2

Onda AM düz xətti bu üçtəpəlilərin uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələrinin aid olduğu düz xətt olar.

İndi fərz edək ki, A və A', B və B', C və C' ayrı –ayrı nöqtələrdirlər və O nöqtəsi bu üçtəpəlilərdən heç birinin tərəfinə aid deyil.

Proyektiv müstəvidə $R = (A,\ B, C, O)$ reperini götürək. Bu reperdə $A,\ B, C, O$ nöqtələri

$A(1,\ 0, 0),\ B(0, 1, 0),\ C(0,\ 0,1)$ və $O(1,\ 1,\ 1)$

koordinatlarına malikdirlər. OA düz xəttinin tənliyi $x_2 - x_3 = 0$, OB düz xəttinin tənliyi $x_1 - x_3 = 0$.

A' nöqtəsi OA düz xətti üzərində olduğundan onun koordinatları $A'(a, 1, 1)$ kimi, B' nöqtəsi OB düz xətti üzərində olduğundan onun koordinatlarını $B'(1, b, 1)$ kimi, C' nöqtəsi OC düz xətti üzərində olduğundan onun kordinatlarını $C'(1,\ 1, c)$ kimi götürmək olar. Çünki götürdüyümüz koordinatlar OA, OB, OC düz xətlərinin tənliklərini ödəyirlər.

İndi də R reperində M, N və P nöqtələrinin koordinatlarını tapaq.

P nöqtəsi AB və $A'B'$ düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsidir. AB düz xəttinin tənliyi $x_3 = 0$ və $A'B'$ düz xəttinin tənliyi

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & 1 \\ x_2 & 1 & b \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

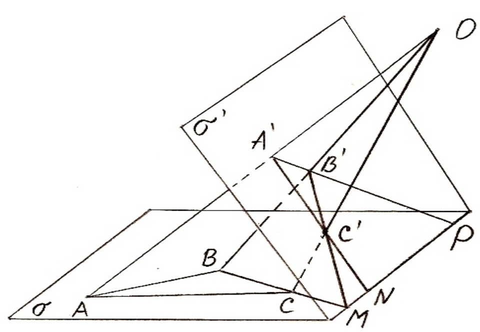
olur.

Buradan da $A'B' : (1-b)x_1 - (a-1)x_2 + x_3(ab-1) = 0$ alarıq. $x_3 = 0$ olduğunu nəzərə alsaq, onda P nöqtəsinin koordinatları $P(a-1,\ 1-b,\ 0)$ kimi olar. Analoji qayda ilə $M(0,\ 1-b,\ c-1)$ və $N(a-1,\ 0,\ 1-c)$ alarıq. M, N və P nöqtələri bir düz xətt üzərindədir, çünki,

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & a-1 \\ 1-b & 1-b & 0 \\ 0 & c-1 & 1-c \end{vmatrix} = 0$$

(Determinatın ikinci və üçüncü sütunlarının cəmi onun birinci sütununu verir) Teorem isbat olundu.

Qeyd edək ki, ABC və $A'B'C'$ üçtəpəliləri proyektiv fəzada müxtəlif müstəvilər üzərində olduqda da teorem doğrudur. Həqiqətən proyektiv fəzada uyğun olaraq σ və σ' müstəvilərində yerləşən ABC və $A'B'C'$ üçtəpəliləri uyğun



Şəkil 3

təpələrindən keçən düz xətlərin O nöqtəsində kəsdiklərini fərz edək. Onda A, B, A' və B' nöqtələri bir müstəvi üzərində olarlar. Onda AB və $A'B'$ düz xətləri kəsişərlər. Onların P kəsişmə nöqtəsi isə σ və σ' müstəvilərinin kəsişmə xətti üzərində olar. Çünki, AB σ müstəvisi üzərində, $A'B'$ isə σ' müstəvisi üzərindədirlər. Eyni qayda ilə AC və $A'C'$ uyğun tərəflərinin, BC və $B'C'$ uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələri də σ və σ' müstəvilərinin kəsişmə düz xətti üzərində olarlar. Deməli, M, N və P nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşirlər.

Proyektiv müstəvidə Dezarq teoremi ilə ikili olan teoremə baxaq: Bu teorem Dezarq teoreminin tərs teoremidir.

Qeyd edək ki, üçtəpəlinin ikili fiquru yenə üçtəpəli olur. Bu fiqura bəzən üçtərəfli də deyilir.

Teorem 2. (Dezarq teoreminin tərsi) İki üçtəpəlinin uyğun tərəflərinin kəsişmə nöqtələri bir düz xəttə aid olarlarsa, onda həmin üçtəpəlilərin uyğun təpələrindən keçən düz xətlər bir nöqtədə kəsişirlər.

Bu teoremin isbatı ikilik prinsipinə görə aydındır.

2. Tərif. Tutaq ki, d proyektiv düz xəttinin elə dörd A, B, C, D nöqtələri verilmişdir ki, A, B, C nöqtələri müxtəlif D isə A nöqtəsi ilə üstə-üstə düşməyən hər hansı nöqtədir. d düz xətti üzərində $R_0 = (A, B, C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatları (x_1, x_2) isə, onda $\frac{x_1}{x_2}$ nisbətinə A, B, C, D nöqtələrinin mürəkkəb (ikiqat və ya anharmonik) nisbəti deyilir və (AB, CD) kimi işarə olunur.

Qeyd edək ki, D nöqtəsi A ilə üst-üstə düşmədiyindən $R_0=(A,\ B,\ C)$ reperində $(x_1,\ x_2)$ koordinatları $x_2\neq 0$ şərtini ödəyir.

Teorem 1. Əgər $A,\ B$ və C proyektiv düz xəttin müxtəlif nöqtələri, λ hər hansı həqiqi ədəd isə, onda d düz xətti üzərində elə yeganə X nöqtəsi var ki, bu nöqtə üçün $(AB,\ CX)=\lambda$.

İsbatı: Proyektiv düz xəttin üzərində $R_0=(A,\ B,\ C)$ reperini və bu reperdə koordinatları $(\lambda,\ 1)$ olan X nöqtəsini götürək. Tərifə görə $(AB,\ CX)=\lambda$. İndi göstərək ki, teoremin şərtini ödəyən X nöqtəsi yeganədir. Əgər proyektiv düz xəttin üzərində $(AB,\ CX')=\lambda$ şərtini ödəyən başqa bir $X'(x_1,\ x_2)_{R_0}$ nöqtəsi də olarsa, onda $\frac{x_1}{x_2}=\lambda.$ Buradan $\frac{x_1}{x_2}=\frac{\lambda}{1}$ alınır. Deməli, X və X' nöqtələrinin koordinatları mütənasibdirlər. Bu isə o deməkdir ki, X' nöqtəsi X nöqtəsi ilə üst-üstə düşür.

Teorem isbat olundu.

Nəticə. Əgər proyektiv müstəvidə $A,\ B,\ C,\ D$ və D' nöqtələri üçün $(AB,\ CD)=(AB,\ CD')$ şərti ödənərsə, onda D və D' nöqtələri üst-üstə düşürlər.

İndi də mürəkkəb nisbətin verilmiş nöqtələrin koordinatları vasitəsi ilə hesablanması düsturunu verək. Bunun üçün aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 2. Əgər proyektiv düz xətt üzərində müəyyən bir R reperində koordinatları ilə verilən

$$A(a_1,\ a_2),\ \ B(b_1,\ b_2),\ \ C(c_1,\ c_2)$$

nöqtələri müxtəlif, $D(d_1,\ d_2)$ nöqtəsi ilə A nöqtəsi ilə üst-üstə düşmürsə, onda

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}} \tag{1}$$

İsbatı. R reperindən $R_0=(A,\ B,\ C)$ reperinə keçid zamanı koordinatları çevrilməsi düsturlarını yazaq. Aydındır ki, ixtiyari $k_1\neq 0,\ \ k_2\neq 0$

həqiqi ədədləri üçün A və B nöqtələrini koordinatlarını $A(k_1a_1, k_1a_2)$ və $B(k_2b_1, k_2b_2)$ kimi də yaza bilərik. k_1 və k_2 ədədlərini elə seçək ki,

$\begin{pmatrix} k_1a_1 & k_2b_1 & c_1 \\ k_1a_2 & k_2b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ keçid matrisinin sütunları əlaqəli olsunlar. Yəni

$$\begin{cases} k_1a_1 + k_2b_1 = c_1 \\ k_1a_2 + k_2b_2 = c_2 \end{cases} \tag{2}$$

Onda §7-də koordinatların çevrilməsinin (16) düsturları

$$\begin{cases} \rho x_1 = k_1a_1x_1' + k_2b_1x_2' \\ \rho x_2 = k_1a_2x_1' + k_2b_2x_2' \end{cases} \tag{3}$$

kimi olar.

Əgər $R_0 = (A,\ B,\ C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatları $(y_1,\ y_2)$ olarsa, onda (3) düsturlarından alarıq.

$$\begin{cases} \rho d_1 = a_1k_1y_1 + b_1k_2y_2 \\ \rho d_2 = a_2k_1y_1 + b_2k_2y_2 \end{cases} \tag{4}$$

Buradan, y_1 və y_2-ni tapaq.

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \rho d_1 & b_1k_2 \\ \rho d_2 & b_2k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1k_1 & b_1k_2 \\ a_2k_1 & b_2k_2 \end{vmatrix}} = \frac{\rho\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{k_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1a_1 & \rho d_1 \\ k_1a_2 & \rho d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1k_1 & b_1k_2 \\ a_2k_1 & b_2k_2 \end{vmatrix}} = \frac{\rho\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{k_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Mürəkkəb nisbətin tərifinə əsasən

$$(AB,\ CD) = \frac{y_1}{y_2} = \frac{k_2\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{k_1\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} \tag{5}$$

İndi isə (2) sistemini k_1 və k_2-yə görə həll etsək, alarıq.

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\qquad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Bu qiymətləri (5) –də yerinə yazsaq

$$
(AB,\ CD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}
$$

Bununla da (1) düsturunu aldıq.

Teorem isbat olundu.

Düz xəttin dörd nöqtəsinin mürəkkəb nisbəti aşağıdakı xassələrə malikdir.

1) $(AB,\ CD)=(CD,\ AB)$

2) $(AB,\ CD)\neq 0$ olarsa, $(AB,\ CD)=\dfrac{1}{(AB,\ CD)}$, $(BA,\ CD)=\dfrac{1}{(AB,\ CD)}$

3) $(AB,\ CD)=(BA,\ DC)$

4) $(AB,\ CC)=1,\quad (AB,\ CB)=0$

5) $(AB,\ CD)+(AC,\ BD)=1$

1), 2) və 3) xassələrini isbat etmək üçün proyektiv düz xətt üzərində ixtiyari reper götürüb, yuxarıdakı nöqtələrin bu reperdə $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$, $C(c_1,\ c_2)$ və $D(d_1,\ d_2)$ koordinatları vasitəsi ilə onların

$$
(AB, CD)\quad (CD, AB),\ (AB, DC),\ (BA,\ CD)\ \ (BA,\ DC)
$$

mürəkkəb nisbətlərini hesablasaq 1), 2), 3) xassələrinin doğruluğunu alarıq.

4) xassəli mürəkkəb nisbətin tərifindən birbaşa alınır.

5) xassəsini isbat edək. $R_0=(A,\ B,\ C)$ reperində D nöqtəsinin koordinatlarını (d_1, d_2) işarə edək. $A,\ B$ və C nöqtələrinin koordinatları uyğun olaraq $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ və $(1,\ 1)$ olduğundan alarıq.

$$
(AB,\ BD)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{d_2-d_1}{d_2}=1-\frac{d_1}{d_2}=1-(AB,\ CD)
$$

Deməli, $(AB,\ CD)+(AC,\ BD)=1$.

Xassə isbat olundu.

Qeyd etmək lazımdır ki, əgər A, B, C, D nöqtələrini müəyyən ntzamla götürdükdə, onların mürəkkəb nisbəti məlum olarsa, 1) -5) xassələrinin köməyi ilə onların ixtiyari nizamla götürülmüş mürəkkəb nisbətini hesablamaq olur. Fərz edək ki, $(AB,\ CD)=\eta\neq 0.$

Onda

$$(AB,\ DC)=\frac{1}{\eta},\ \ (BA,\ C\,D)=\frac{1}{\eta},\ \ (BA,\ DC)=\eta,$$
$$(AD,\ BC)=1-(AB,\ DC)=1-\frac{1}{\eta}=\frac{\eta-1}{\eta}$$
və s.

İndi isə genişlənmiş düz xəttin dörd nöqtəsinin mürəkkəb nisbətinin həndəsi mənasını göstərən aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 3. Əgər A, B, C, D genişlənmiş düz xəttin məxsusi nöqtələri, P_∞ isə qeyri –məxsusi nöqtəsidirsə, onda

$$(AB,\ CD)=\frac{(AB,\ C)}{(AB,\ D)} \tag{6}$$

$$(AB,\ CP_\infty)=-(AB,\ C) \tag{7}$$

olar. Burada $(AB,\ C)$ və $(AB,\ D)$ düz xəttin üç nöqtəsinin sadə nisbətidirlər.

İsbatı. Genişlənmiş düz xətdə $\overline{R}=(P_\infty,\ A,\ B)$ reperini götürək. Bu reperdə P_∞, A, B nöqtələri ilə $P_\infty(1,\ 0),\ A(0,\ 1),\ B(1,\ 1)$ olar. C və D nöqtələrinin koordinatlarını isə $(c_1,\ c_2)$ və $(d_1,\ d_2)$ ilə işarə edək.

Aydındır ki, $c_2\neq 0,\ \ d_2\neq 0$.

Genişlənmiş düz xəttini məxsusi M_1 və M_2 nöqtələrinin təyin elədiyi M_1M_2 parçasını $\lambda\neq -1$ nisbətində bölən M nöqtəsi üçün $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\,\overrightarrow{MM_2}$ münasibəti ödənir və belə işarə edirlər. $\lambda=(M_1M_2,\ M)$. Əgər M_1, M_2, M nöqtələrinin $A, \vec{AB}$ afin koordinat sistemində koordinatları uyğun olaraq $x_1,\ x$ və x olarsa, onda

$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\ \overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{MM_2}=(x_2-x)\overrightarrow{AB},$ buna görə

$$\left(M_1\ M_2,\ M\right)=\frac{x_1-x}{x_2-x} \qquad (8)$$

§14-də isbat etdiyimiz teoremə əsasən $\overline{R}=\left(P_\infty,\ A,\ B\right)$ reperində koordinatları ilə verilmiş

$$A(0,1),\quad B(1,1),\quad C(c_1,c_2),\quad D(d_1\, d_2)$$

nöqtələri $A,\ \vec{AB}$ afin reperində $A(0),\ B(1),\ C(c),\ D(d)$ koordinatlarına malikdirlər. Burada $c=\frac{c_1}{c_2},\quad d=\frac{d_1}{d_2}$

Deməli,

$$\left(AB,\ C\right)=\frac{1}{1-c},\quad \left(AB,\ D\right)=\frac{d}{1-d} \qquad (9)$$

İndi isə (1) düsturundan istifadə edərək $\left(AB,\ CD\right)$ və $\left(AB,\ CP_\infty\right)$ mürəkkəb nisbətlərini hesablayaq.

$$\left(AB,\ CD\right)=\frac{\begin{vmatrix}0 & c_1\\ 1 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & d_1\\ 1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & d_1\\ 1 & d_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & c_1\\ 1 & c_2\end{vmatrix}}=\frac{c_1\left(d_2-d_1\right)}{d_1\left(c_2-c_1\right)}=\frac{\dfrac{c_1}{c_2-c_1}}{\dfrac{d_1}{d_2-d_1}}=$$

$$=\frac{\dfrac{c}{1-c}}{\dfrac{d}{1-d}}=\frac{\left(AB,\ C\right)}{\left(AB,\ D\right)},$$

(6) düsturu isbat olundu.

$$\left(AB,\ CP_\infty\right)=\frac{\begin{vmatrix}0 & c_1\\ 1 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & c_1\\ 1 & c_2\end{vmatrix}}=\frac{c_1}{c_1-c_2}=\frac{-c}{1-c}=-\left(AB,\ C\right)$$

(7) düsturu isbat olundu. Teorem isbat olundu

VI Mühazirə

Proyektiv müstəvidə ikitərtibli xətlər

Tərif. Proyektiv müstəvidə müəyyən bir R reperinə görə koordinatları

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (1)$$

tənliyini ödəyən bütün nöqtələr çoxluğuna ikitərtibli xətt deyilir.

Burada fərz olunur ki, a_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ əmsallarının hamısı birdən sıfra bərabər deyil və $a_{ij} = a_{ji}$. Onda (1) tənliyini qısaca belə yaza bilərik.

$$\sum_{i,\ j=1}^{3} a_{ij}x_i\, x_j = 0 \quad (2)$$

İndi göstərək ki, ikitərtibli xətt anlayışı R reperinin seçilməsindən asılı deyil.

Tutaq ki, (2) tənliyi γ ikitərtibli xəttin $R = (A_1,\ A_2,\ A_3,\ E)$ reperində tənliyidir. Əgər proyektiv müstəvidə başqa bir $R' = (A_1',\ A_2',\ A_3',\ E')$ reperi də verilibsə, onda R repermndən R' reperinə keçid düsturları

$$\rho x_i = b_{i1}x_1' + b_{i2}x_2' + b_i\, x_{i3}' \quad i = 1,\ 2,\ 3 \quad (3)$$

şəklində olar. Bu düsturları (2) –də nəzərə alsaq γ xətti üçün yeni reperdə

$$\sum_{i,\ j}^{3} a_{ij}'x_i'\, x_j' = 0 \quad (4)$$

tənliyi alınar. Burada

$$a_{ij}' = \sum_{k,\ \ell=1}^{3} b_{ki}a_{k\ell}b_{\ell j} \quad (5)$$

(4) tənliyi göstərir ki, γ ikitərtibli xəttinin istənilən reperə görə tənliyinin şəkli eyni olur, yalnız tənlikdə əmsallar (5) qanunu ilə dəyişirlər.

(2) tənliyinin sol tərəfi üçölçülü V vektor fəzasında

$$g\left(\vec{x}\right) = \sum_{i,\ j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j \quad (6)$$

kvadratik formasının ifadəsidir. V vektor fəzası proyektiv müstəvini də doğuran fəzadır. A_1, A_2, A_3 nöqtələrinin doğuranları $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3 \in V$ bazis vektorları, A_1', A_2', A_3' nöqtələrinin doğuranları $\vec{a}_1',\ \vec{a}_2',\ \vec{a}_3' \in V$ vektorları olsun,

$\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ vektorları $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisinə görə koordinatları ilə $\vec{a}'_1(b_{11}, b_{21}, b_{31}), \vec{a}'_2(b_{12}, b_{22}, b_{32}), \vec{a}'_3(b_{13}, b_{23}, b_{33})$ olarsa, onda

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazisindən $\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3$ bazisinə keçid matrisi olar. (6) kvadratik formasının matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{8}$$

eyni zamanda (1) ikitərtibli xəttin də matrisi olar. (4) tənliyi ilə verilən ikitərtibli xəttin matrisi

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \tag{9}$$

olarsa, cəbr və həndəsə kurslarından məlum olduğu kimi

$$A' = {}^tB \cdot A \cdot B \tag{10}$$

olar. Burada ${}^tB$ ilə B matrisinin transponirə olunmuş matrisdir. Yenə cəbr kursundan məlum olduğu kimi $\det B \neq 0$ olduğu üçün

$$ranqA' = ranqA \tag{11}$$

olur.

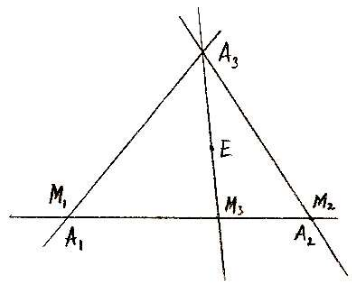
Deməli (4) tənliyi ilə təyin olunan xəttin əmsalları sıfır ola bilməz. İsbat etdik ki, ikitərtibli xətt anlayışı reperin seçilməsindən asılı deyil.

Tərif. A matrisinin ranqına (1) tənliyi ilə verilən γ ikitərtibli xəttin ranqı deyilir.

Ranqı 3-ə bərabər olan ikitərtibli xətlərə cırlaşmayan, ranqı 3-dən kiçik olan ikitərtibli xətlərə cırlaşan ikitərtibli xətlər deyilir.

Yuxarıda gördük ki, bir reperdən digərinə keçdikdə ikitərtibli xəttin ranqı dəyişmir. Aşağıdakı lemmanı isbat edək.

Lemma. Proyektiv müstəvidə ixtiyari düz xətt cırlaşmayan ikitərtibli xətti ən çoxu iki nöqtədə kəsə bilər.



Şəkil 1

İsbatı. Lemmanın əksini fərz etmək üsulu ilə isbat edək. d düz xətti cırlaşmayan γ xəttini üç M_1, M_2 və M_3 nöqtələrində kəsir. Proyektiv müstəvidə elə $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ reperini elə seçək ki, A_1 nöqtəsi M_1 ilə, A_2 nöqtəsi M_2 ilə üst –üstə düşsün. A_3 nöqtəsini isə elə götürək ki, M_3 nöqtəsi A_3E düz xətti ilə A_1A_2 düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi olsun. Bu reperə görə M_1, M_2, M_3 nöqtələri koordinatları ilə $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, 1, 0)$, $M_3(1, 1, 0)$ olacaqdır. Nöqtələrin koordinatlarını γ xəttinin

$$\sum_{i,j}^{n} a_{i,j} x_i x_j = 0$$

tənliyində yerinə yazsaq, alarıq ki,

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{21} = 0$$

Bu isə o deməkdir ki, $\det A = 0$

Yəni γ xətti cırlaşandır. Bu isə lemmanın şərtinə ziddir.

Lemma isbat olundu.

Yuxarıda da qeyd etdiyimiz kimi ikitərtibli xətt anlayışı və onun ranqı reperin seçilməsindən asılı deyil. Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etdik.

Teorem: İxtiyari proyektiv çevirmədə ikitərtibli xəttin ranqı dəyişmir, yəni ikitərtibli xətt ranqı onun ranqına bərabər olan ikitərtibli xəttə keçir.

İndi isə ikitərtibli xətlərin proyektiv təsnifatını verək. Cəbr və həndəsə kurslarından məlumdur ki, üçölçülü V vektor fəzasında elə $\vec{a}_1', \vec{a}_2', \vec{a}_3'$ bazisi var ki, γ xəttinin

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} x_i x_j = 0 \tag{2}$$

tənliyinin sol tərəfindəki

$$g\left(\vec{x}\right) = \sum_{i,j=1}^{3} \vec{a}_{i,j}\, x_i x_j \tag{6}$$

kvadratik forması

$$g\left(\vec{x}\right) = \varepsilon_1 (x_1')^2 + \varepsilon_2 (x_2')^2 + \varepsilon_3 (x_3')^2 \tag{12}$$

şəklində olur. Burada $\varepsilon_i = \pm 1,\ i = 1,\ 2,\ 3$

Əgər proyektiv müstəvidə $\vec{a}_1',\ \vec{a}_2',\ \vec{a}_3',\ \vec{e} = \vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \vec{a}_1' \in V$ vektorlarının doğuruluğu A_1', A_2', A_3', E' nöqtələrindən ibarət $R' = (A_1',\ A_2',\ A_3',\ E')$ reperini seçsək, (1) tənliyi

$$\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \varepsilon_3 y_3^2 = 0 \tag{13}$$

şəklinə düşər. $(\varepsilon_i = \pm 1,\ \ i = 1,\ 2, 3)$

γ xəttinin r ranqının qiymətindən asılı olaraq aşağıdakı hallar mümkündür.

I. $r = 3$. Bu halda γ xəttinin tənliyi aşağıdakı iki tipdən biri ola bilər.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{14}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{15}$$

(14) tənliyi ödəyən heç bir həqiqi nöqtə yoxdur. Bu səbəbdən də ona ikitərtibli sıfır xətt deyilir. (15) tənliyi ilə verilən xəttə isə ikitərtibli oval xətt deyilir.

II. $r = 2$. Bu halda γ xəttinin tənliyi aşağıdakı iki şəkildən birində ola bilər.

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \tag{16}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \tag{17}$$

(16) tənliyi ilə verilən ikitərtibli xətt $x+ix_2=0$ və $x-ix_2=0$ kimi iki xəyali düz xəttə parçalanan xətt olur. Bu iki xətt $(0,\ 0,\ 1)$ həqiqi nöqtədə kəsişirlər.

(17) tənliyi ilə verilən xətt isə $x+x_2=0,\ x-x_2=0$ kimi iki həqiqi düz xəttə parçalanan xətdir.

III. $r=1$. Bu halda γ xəttinin tənliyi

$$x_1^2=0 \tag{18}$$

şəklində olur. Bu halda ikitərtibli xətt $x_1=0,\ x_2=0$ kimi iki üst-üstə düşən xəttə parçalanan xətt olur. (14), (15), (16), (17), (18) şəklində olan tənliklərə ikitərtibli xəttin kanonik tənlikləri deyilir.

Deməli, proyektiv müstəvidə ancaq beş tip ikitərtibli xətt vardır. Onları aşağıdakı cədvəldə verək.

	Xəttin adı	Xəttin kanonik tənliyi	Xətti ranqı
1.	Oval xətt	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	3
2.	Sıfır xətt	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	3
3.	İki həqiqi düz xətt	$x_1^2-x_2^2=0$	2
4.	İki xəyali düz xətt	$x_1^2+x_2^2=0$	2
5.	İki üst-üstə düşən düz xətt	$x_1^2=0$	1

VII Mühazirə

Qurma məsələsinin həllinin sxemi. Kəsişmələr metodu.

Qurmanın *postulatları* adlanan aşağıdakı əməliyyatlar artıq «icra olunmuş» qurma addımları hesab olunurlar.

$\Pi 1.$ Qurulmuş iki nöqtədən keçən düz xəttin qurulması.

$\Pi 2.$ Mərkəzi qurulmuş nöqtədə olan və radiusu uc nöqtələri qurulmuş parçaya bərabər olan çevrənin qurulması.

$\Pi 3.$ Paralel olmayan iki qurulmuş düz xəttin kəsişmə nöqtəsinin qurulması.

$\Pi 4.$ Əgər qurulmuş çevrə ilə qurulmuş düz xətt kəsişirlərsə, onların kəsişmə nöqtələrinin qurulması.

$\Pi 5.$ Əgər iki qurulmuş çevrə kəsişirlərsə, onların kəsişmə nöqtələrinin qurulması.

Qurma məsələsini həll etmək - $\Pi 1 - \Pi 5$ postulatlarında göstərilən ən sadə qurmaları müəyyən bir ardıcıllıqla yerinə yetirməklə tələb olunan fiquru qurmaq deməkdir. Lakin məsələni bu qədər «xırda» hissələrə bölməklə, həll etmək heç də əlverişli deyil. Bu səbəbdən də qurma məsələlərinin həlli zamanı bir qədər başqa cür hərəkət edirlər. Belə ki, əgər hər hansı bir qurma məsələsi həll olunubsa, sonradan bu məsələnin həllindən tam şəkildə başqa qurma məsələlərinin həllində istifadə etmək olar. Bir sıra sadə qurma məsələləri var ki, onların həlli orta məktəb həndəsə kursunda məlumdur. Bu məsələlər daha mürəkkəb məsələlərin həlli zamanı qarşıya çıxdıqda, biz o məsələləri həll olunmuş hesab edərək, onların həllindən hazır şəkildə istifadə edə bilərik. Bu məsələlərə *elementar qurma məsələləri* deyəcəyik. Elementar qurma məsələlərinin siyahısı şərtidir. Adətən elementar qurmalar olaraq aşağıdakı məsələləri nəzərdə tuturlar.

Qurma 1. Verilən şüa üzərində onun başlanğıcından başlayaraq verilən parçaya bərabər parça ayırmaq.

Qurma 2. Təpəsi verilən şüanın başlanğıcında olan verilən yarımmüstəvi üzərində, verilən bucağa bərabər bucaq ayırmaq.

Qurma 3. Üç tərəfinə görə üçbucaq qurmaq.

Qurma 4. İki tərəfinə və onlar arasındakı bucağa görə üçbucaq qurmaq.

Qurma 5. Tərəfinə və bu tərəfə bitişik iki bucağına görə üçbucaq qurmaq.

Qurma 6. Açıq bucaqdan kiçik olan bucağın tənbölənini qurmaq.

Qurma 7. Verilən parçanın orta perpendikulyarını qurmaq.

Qurma 8. Verilən parçanın orta nöqtəsini qurmaq.

Qurma 9. Verilən nöqtədən keçən və verilən düz xəttə perpendikulyar olan düz xətti qurmaq.

Qurma 10. Verilən düz xətt üzərində olmayan nöqtədən həmin düz xətlə paralel düz xətti qurmaq.

Qurma 11. Hipetonuzuna və hər hansı iti bucağına görə düzbucaqlı üçbucaq qurmaq.

Qurma 12. Hipetonuzuna və katetinə görə düzbucaqlı üçbucaq qurmaq.

Qurma 13. Çevrənin üzərində olan nöqtədən ona toxunan düz xətti qurmaq.

Qurma 14. Verilən parçanı verilən nisbətdə bölmək.

Bundan sonra bu məsələlərin həllindən heç bir izahat vermədən istifadə edəcəəyik.

İndi də qurma məsələlərinin həllinin hansı sxem üzrə aparılması məsələsi üzərində dayanaq.

Qurma məsələsinin həlli dedikdə, $\Pi1-\Pi5$ postulatlarında göstərilən ən sadə qurmaların hər hansı sonlu ardıcıllığını tapmaq başa düşülür ki, həmin ən sadə qurmalar yerinə yetirildikdən sonra tələb olunan fiqur qurulmuş hesab olunur və ya məsələnin şərtləri daxilində tələb olunan fiqurun olmadığı isbat olunur. Sonrası məsələnin həllərinin sayı, məsələnin həllinin olması üçün verilənlərin hansı şərtləri ödəməsi suallarına cavab verməkdən ibarət olur. Bütün bu suallara cavab vermək üçün qurma məsələlərinin həlli zamanı müəyyən bir sxemə riayət etmək lazım gəlir. Həmin sxemi müxtəlif qaydalarla seçmək olar. Ənənəvi olaraq ən çox istifadə olunan sxem aşağıdakı kimi olur: analiz, qurma, isbat və araşdırma. Bunlar qurma məsələlərinin həllinin mərhələləri adlanırlar.

Analiz və ya **həllin axtarışı** mərhələsi qurma məsələsinin həlli üsulunu tapmaq üçün, verilən fiqurlarla axtarılan fiqurlar arasındakı əlaqələri müəyyən etməkdən ibarətdir.

Analiz mərhələsində fərz olunur ki, qurma məsələsi həll olunub. Axtarılan və tələb olunan fiqurların təsvir olunduğu çertyoj «gözəyarı» olaraq çəkilir. Sonra isə axtarılan fiqur ilə məsələnin verilənləri arasında əlaqələr öyrənilir. Bu əlaqələr o səviyyədə tapılmalıdır ki, axtarılan fiquru qurmaq üçün lazım olan ən sadə qurmaların ardıcıllığını tamamilə müəyyən etmək mümkün olsun. Əgər tələb olunan fiquru qurmaq üçün lazım olan elementar qurmaların ardıcıllığı məlumdursa, onda analiz mərhələsinə ehtiyac qalmır.

Qurma mərhələsi məsələni həll etmək üçün lazım olan qurmaların (ən sadə və elementar) ardıcıllığını göstərməkdən ibarətdir. Bu zaman pərgar və xətkeşin köməyi ilə, göstərilən ardıcıllıqla, qurmaları yerinə yetirməklə faktiki olaraq tələb olan fiqurun çertyoju çəkilir.

İsbat mərhələsində qurma mərhələsində qurulmuş fiqurun məsələdəki bütün şərtləri ödədiyi göstərilir. Bir sıra hallarda qurulan fiqurun məsələdə qoyulan şərtləri ödəməsi qurma mərhələsində artıq aşkar görünür. Bu halda isbata ehtiyac qalmır.

Araşdırma mərhələsində aşağıdakı iki suala cavab verilir:

a) məsələnin şərtindəki verilən fiqurlar hansı şərti ödədikdə məsələnin, həlli var?

b) Verilənlərin müxtəlif mümkün hallarında məsələnin neçə həlli var?

Yuxarıda deyilənləri əyani şəkildə göstərmək üçün bir qurma məsələsini həll edək.

Qurma məsələlərinin həlli üçün əsasən üç usul vardır: Kəsişmə üsulu, çevirmələr üsulu və cəbri üsul. Bu mühazirədə kəsişmə üsulu ilə qurma məsələlərinin həllindən bəhs edəcəyik.

Bu üsulun mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir. Qurma məsələsinin həlli α_1 və α_2 şərtlərini ödəyən X nöqtəsinin qurulmasına gətirilir. α_1 şərtini ödəyən müstəvi nöqtələri çoxluğunu F_1 ilə α_2 şərtini ödəyən nöqtələr çoxluğunu F_2 ilə işarə edək. Onda aydındır ki, $X \in F_1 \cap F_2$ olacaq.

X nöqtəsinin qurulması üçün F_1 və F_2 çoxluqlarının xətkeş və pərgarın köməyi ilə qurula bilən olması zəruridir. Qurma məsələlərinin kəsişmə üsulu ilə həlli zamanı aşağıda sadalayacağımız çoxluqlara tez-tez müraciət olunur.

1) Müstəvinin A və B nöqtələrindən eyni məsafədə yerləşən bütün nöqtələrin çoxluğu AB parçasının orta perpendikulyarıdır.

2) Verilən düz xəttdən verilən məsafədə olan nöqtələ-rin çoxluğu, həmin düz xəttə paralel olan və ondan verilən məsafədə yerləşən iki düz xəttdən ibarətdir.

3) İki paralel düz xəttin hər birindən eyni məsafədə yerləşən nöqtələrin çoxluğu verilən düz xətlərin simmetriya oxudur.

4) İki kəsişən düz xəttin hər birindən eyni məsafədə yerləşən nöqtələrin çoxluğu verilən düz xətlərin əmələ gətirdiyi bucaqların tənbölənlərini üzərində saxlayan və qarşılıqlı perpendikulyar olan iki düz xətdən ibarətdir.

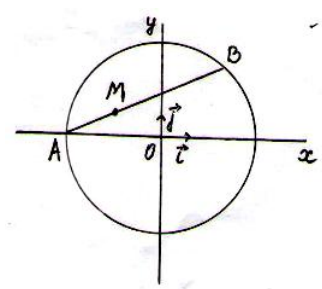
5) Müstəvinin AB parçasının düz bucaq altında göründüyü bütün nöqtələrinin çoxluğu, diametri AB parçası olan çevrənin A və B nöqtələrindən fərqli nöqtələri çoxluğudur.

6) Müstəvinin AB parçasının $\varphi\,(\varphi \neq 180^0)$ bucağı altında göründüyü nöqtələrinin çoxluğu ortaq A və B uc nöqtələrinə malik olan və AB düz xəttinə nəzərən simmetrik olan iki qövsdən ibarətdir.

7) Verilən çevrənin $\varphi\,(\varphi \neq 180^0)$ bucağı altında göründüyü müstəvi nöqtələrinin çoxluğu, həmin çevrə ilə konsentrik olan, radiusu verilmiş çevrənin radiusundan böyük olan çevrədir.

8) (O, OA) çevrəsinin A nöqtəsindən çəkilən bütün vətərlərini eyni $\lambda\,(\lambda > 0)$nisbətində bölən bütün nöqtələr çoxluğu, mərkəzi OA düz xətti üzərində olan, bir çevrədir. (A nöqtəsi bu çevrəyə daxil deyil). Əgər xüsusi halda $\lambda = 1$ olarsa OA parçası həmin çevrənin diametri olacaqdır.

İsbatı: Düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı (O, OA) çevrəsinin O mərkəzi ilə üst-üstə düşsün (Şəkil 1). A nöqtəsinin koordinatları $A(-r, 0)$ olsun, $r = OA$. AB verilən çevrənin A nöqtəsindən çəkilən hər hansı vətərdir. M nöqtəsi isə bu vətərin $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ şərtini ödəyən nöqtəsidir. B nöqtəsinin koordinatlarını $B(x_1, y_1)$ ilə, M nöqtəsinin koordinatlarını isə $M(x, y)$ ilə işarə edək. Parçanı verilən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatları düsturuna görə



Şəkil 1

$$x = \frac{-r + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

$\lambda > 0$ olduğundan $\lambda \neq 0,\ 1 + \lambda \neq 0$ və (1) düsturlarından alarıq.

$$x_1 = \frac{1 + \lambda}{\lambda}\left(x + \frac{r}{1 + \lambda}\right), \quad y_1 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} y \qquad (2)$$

$B(x_1, y_1)$ nöqtəsi verilən çevrənin üzərində olduğundan $x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = r^2$ olacaq. Buradan

$$\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\left(x+\frac{r}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 y^2=r^2 \qquad (3)$$

və ya

$$\left(x+\frac{r}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\frac{\lambda^2 r^2}{(1+\lambda)^2} \qquad (4)$$

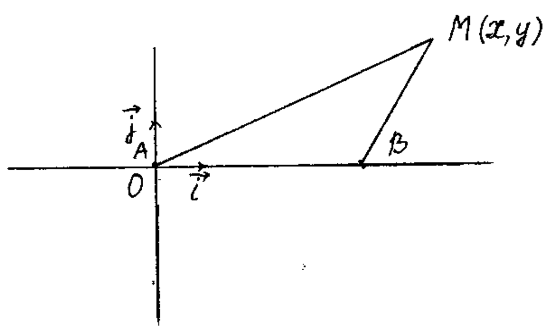
Deməli M nöqtəsi mərkəzi $\left(-\frac{r}{1+\lambda}, 0\right)$ nöqtəsində və radiusu $\frac{\lambda r}{1+\lambda}$-ya bərabər olan çevrənin üzərindədir. Beləliklə, isbat olundu ki, verilən çevrənin A nöqtəsindən çəkilən bütün vətərlərini $\lambda\ (\lambda>0)$nisbətində bölən nöqtələr (4) tənliyi ilə verilən çevrənin A nöqtəsindən fərqli bütün nöqtələrindən ibarətdir. A nöqtəsinin koordinatları da (4) tənliyini ödəyir. $\lambda=1$ olarsa (4) tənliyi

$$\left(x+\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2 \qquad (5)$$

alarıq. Bu isə diametri OA olan çevrənin tənliyidir. İsbat olundu.

9) Müstəvinin verilmiş A və B nöqtələrindən məsafələrinin kvadratları fərqi verilən sabit ədədə bərabər olan nöqtələr çoxluğu, AB düz xəttinə perpendikulyar olan düz xətdir.

İsbatı: $O\vec{i}\,\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı A nöqtəsi ilə üst-üstə düşsün. $\vec{i}$ vektorunun istiqaməti $\overrightarrow{AB}$ vektorunun istiqaməti ilə üst-üstə düşsün.



Şəkil 2

Verilən sabit ədədi α ilə, AB məsafəsini isə a ilə işarə edək. Seçilmiş koordinat sistemində A(0, 0) və $B(a,0)$ olacaq.

$M(x,y)$ nöqtəsi üçün $AM^2 - BM^2 = \alpha$ şərti ödənərsə onda $AM^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2, BM^2 = (x-a)^2 + (y-0)^2$ olar. Yəni $x^2 + y^2 - ((x-a)^2 + y^2) = \alpha$. Buradan

$$2ax - a^2 = \alpha \text{ və}$$

$$x = \frac{\alpha + a^2}{2a} \quad (6)$$

alarıq. (6) tənliyi isə $O\vec{i}\,\vec{j}$ koordinat sistemində Ox oxuna perpendikulyar olan düz xəttin tənliyidir. İsbat olundu.

VIII Mühazirə

Qurma məsələlərinin həllinə hərəkətlərin tətbiqi. Oxşarlıq metodu

Qurma məsələlərinin həllində çox vaxt müstəvinin müxtəlif həndəsi çevirmələrindən istifadə olunur. Belə çevirmələrə misal olaraq müstəvinin hərəkətinin müxtəlif növləri olan simmetriyanı, paralel köçürməni, dönməni və s. göstərmək olar. Eyni zamanda hərəkət çevirməsindən fərqli olan oxşar çevirmədən, oxşar çevirmənin xüsusi halı olan homotetiyadan, inversiya çevirməsindən də istifadə olunur.

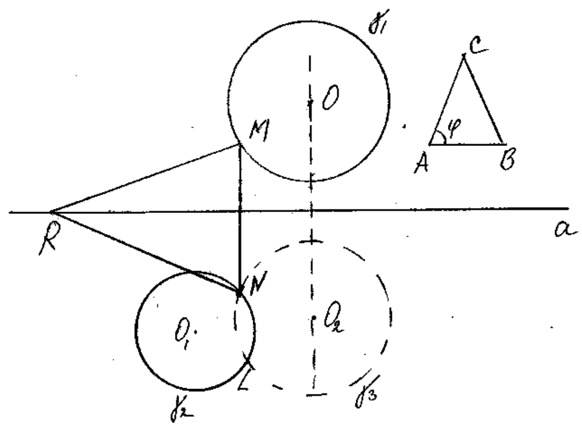
Əvvəlcə simmetriya üsulunun köməyi ilə bir məsələnin həlli üzərində dayanaq.

Məsələ 1. İki γ_1 və γ_2 çevrələri, a düz xətti və ABC bərabəryanlı üçbucağı verilmişdir (AC=BC). ABC üçbucağının oxşar elə MNR üçbucağını qurun ki, $M \in \gamma_1$, $N \in \gamma_2$ və R təpəsindən keçən hündürlük a düz xətti ilə üst-üstə düşsün.

Həlli:

Analiz. Tələb olunan MNR üçbucağının qurulduğunu fərz edək.

$M \in \gamma_1$, $N \in \gamma_2$ MNR bərabəryanlı üçbucağının hündürlüyü a düz xətti üzərindədir. a düz xəttinə nəzərən Ox simmetriyasına baxaq. Bu simmetriyada M nöqtəsi ilə N nöqtəsi də simmetrik olacaq. γ_1 çevrəsi ilə a düz xəttinə nəzərən simmetrik olan γ_3 çevrəsini quraq.



Şəkil 1

N nöqtəsi $M \in \gamma_1$ nöqtəsi ilə simmetrik olduğundan, $N \in \gamma_3$ olar. Buradan isə $N \in \gamma_2 \cap \gamma_3$ alarıq. $\varphi = \widehat{BAC}$ işarə edək. $\widehat{NMR} = \varphi$ olduğundan aşağıdakı qurmalar alınar.

Qurma: 1) a düz xəttinə nəzərən γ_1 çevrəsi ilə simmetrik olan γ_3 çevrəsini quraq.

2) γ_2 və γ_3 çevrələrinin kəsişmə nöqtələrindən birini N ilə işarə edək. $N \in \gamma_2 \cap \gamma_3$.

3) a düz xəttinə nəzərən N nöqtəsi ilə simmetrik olan M nöqtəsini quraq.

4) MN şüasından başlayaraq verilən $\hat{\varphi} = \angle BAC$ bucağına bərabər olan $\angle NMR$ ayıraq.

5) $R = a \cap MR$ olsun.

6) ΔMNR -i quraq. ΔMNR tələb olunan üçbucaqdır.

İsbatı: ΔABC və ΔMNR bərabəryanlı üçbucaqdırlar. Oturacağa bitişik bucaqları bərabər olduğundan $\Delta MNR \sim \Delta ABC$ olar.

Araşdırma: Məsələnin həllinin varlığı Sçevrələrinin qarşılıqlı vəziyyətindən asılıdır.

I hal. Əgər γ_2 və γ_3 çevrələri kəsişməzlərsə onda məsələnin həlli yoxdur.

II hal. Əgər γ_2 və γ_3 çevrələri toxunurlarsa onda bərabərlik dəqiqliklə məsələnin yalnız bir həlli var.

III hal. Əgər γ_2 və γ_3 çevrələri iki nöqtədə kəsişirlərsə bərabərlik dəqiqliklə məsələnin iki həlli vardır.

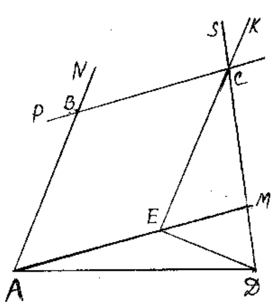
IV hal. Əgər γ_2 və γ_3 çevrələri üst-üstə düşərlərsə məsələnin sonsuz sayda həlli var.

İndi də paralel köçürmə metodu ilə həll olunan bir qurma məsələsini nəzərdən keçirək.

Məsələ 2. İki qarşı tərəfinə və üç bucağına görə qabarıq dördbucaqlı qurun:

Həlli:

Analiz. Tələb olunan ABCD dördbucaqlısının qurulduğunu fərz edək (Şəkil 14). $AD = \overline{a},\ BC = \overline{b}$ dördbucaqlının verilən tərəfləri və $\angle A = \overline{\varphi},\ \angle B = \overline{\psi},\ \angle D = \overline{\delta}$ dördbucaqlının verilən bucaqlarıdırlar.



Məsələnin şərtindən aydındır ki, $0 < \varphi < 180^0,\ 0 < \delta < 180^0$ olmalıdırlar. BC tərəfini $\overrightarrow{BA}$ vektoru qədər paralel köçürək və onun obrazını AE ilə işarə edək. ABCE fiquru paraleloqram olduğundan

$B\hat{A}E = 180^0 - \hat{B} = 180^0 - \psi$, $A\hat{E}C = \psi$ olar.AED üçbucağında isə üç element: $AD = \overline{a},\ AE = BC = \overline{b}$ tərəfləri və onlar arasındakı $E\hat{A}D = \hat{A} - B\hat{A}E = \varphi - (180^0 - \psi) = \varphi + \psi - 180^0$

bucağı məlumdur. Onda aşağıdakı qurmalar alınır.

Qurma: 1) hər hansı düz xətt üzərində $AD = \overline{a}$ parçası ayıraq.

2) AD şüasından başlayaraq ölçüsü $\varphi + \psi - 180^0$-yə bərabər olan MAD bucağını ayıraq.

3) AM şüası üzərində AE=b parçasını ayıraq.

4) DA şüasından başlayaraq M nöqtəsinin yerləşdiyi yarımmüstəvidə $< SDA = \overline{\delta}$ bucağını ayıraq.

5) EA şüasından başlayaraq D nöqtəsinin yerləşmədiyi yarımmüstəvidə $< AEK = \overline{\psi}$ bucağını ayıraq.

6) $C = EK \cap DS$

7) C nöqtəsindən başlayaraq EA şüası ilə eyni istiqamətli olan CP şüasını quraq.

8) CP şüası üzərində $CB = \overline{b}$ parçasını ayıraq.

Aldığımız ABCD dördbucaqlısı tələb olunandır.

İsbatı: ABCE fiquru paraleloqram olduğundan $BC = \overline{b}$ şərti ödənər. (Qurmaya görə isə $AD = \overline{a}$)

$$A\hat{B}C = A\hat{E}C = \psi\ .\ B\hat{A}E = 180^0 - \psi$$

$$\hat{A} = B\hat{A}E = 180^0 - \psi + \varphi + \psi - 180^0 = \varphi$$

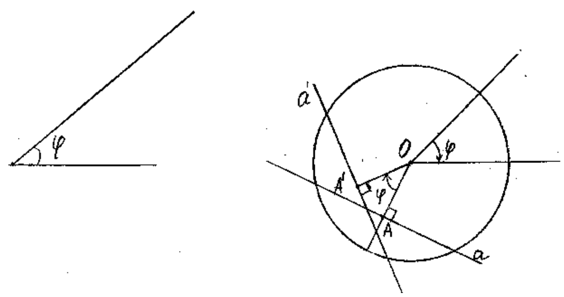
Qurmaya görə isə $AD = \overline{a}$.

Deməli ABCD tələb olunan dördbucaqlıdır.

Araşdırma: Qabarıq dördbucaqlının bucaqları cəmi 360^0-yə bərabərdir. Deməli $\varphi + \psi + \delta < 360^0$ olsa məsələnin yeganə həlli var. Əks halda məsələnin həlli yoxdur.

İndi də dönmə üsulu ilə qurma məsələlərinin həllini nəzərdən keçirək. Öncə onu qeyd edək ki, bu üsul ilə məsələ həll edərkən dönmə çevirməsində nöqtənin, düz xəttin və çevrənin obrazını qurmağı bacarmalıyıq.

Fərz edək ki, müstəvinin O nöqtəsi ətrafında verilən φ bucağı qədər dönmə çevirməsi verilib. Bu çevirmədə verilən M nöqtəsinin və a düz xəttinin obrazını qurmaq lazımdır. (Şəkil 3).



Şəkil 3

Əgər M nöqtəsi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşərsə, onun obrazı elə onun özü olacaq. Fərz edirik ki, M nöqtəsi O nöqtəsi ilə üst-üstə düşmür. (O, OM) çevrəsini quraq. OM şüasından başlayaraq verilən $\overline{\varphi}$ bucağını ayıraq. Bucağın ikinci tərəfinin çevrə ilə kəsişdiyi M' nöqtəsi bu dönmədə M nöqtəsinin obrazı olacaq.

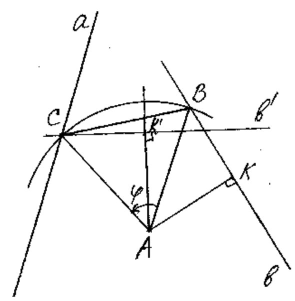
a düz xəttinin dönmədə obrazını qurmaq üçün O nöqtəsindən a düz xəttinə OA perpendikulyarı çəkilir. A nöqtəsinin O nöqtəsi ətrafında $\overline{\varphi}$ bucağı qədər dönmədə A' obrazı qurulur. A' nöqtəsindən OA' düz xəttinə çəkilən a' perpendikulyar düz xətt a düz xəttinin O nöqtəsi ətrafında $\overline{\varphi}$ bucağı qədər dönmədə obrazı olacaq.

(C,r) çevrəsinin O nöqtəsi ətrafında φ bucağı qədər dönmədə obrazını qurmaq üçün C nöqtəsinin bu dönmədə C' obrazı qurulur. (C',r) çevrəsi (C,r)çevrəsinin obrazı olacaq.

Məsələ 3. A nöqtəsi və bu nöqtədən keçməyən iki a və b düz xətləri verilmişdir. Təpələrindən biri A nöqtəsi ilə üst-üstə düşən, digər iki təpəsi a və b düz xətlərinin üzərində yerləşən bərabərtərəfli üçbucaq qurun:

Həlli:

Analiz. Fərz edək ki, tələb olunan ABC üçbucağını qurmuşuq. $B \in b,\ C \in a$. b düz xəttinin A nöqtəsi ətrafında $\varphi = 60^0$ li bucaq qədər dönməsində B nöqtəsinin obrazı, b düz xəttinin obrazı olan b' düz xətti ilə a düz xəttinin kəsişməsi olan C nöqtəsi olacaqdır. Əgər C nöqtəsini qursaq, B nöqtəsini də asanlıqla qura bilərik.



Şəkil 4

Qurma: 1) b düz xəttinin A nöqtəsi ətrafında $\varphi = 60^0$ bucaq qədər dönməsindən alınan b' obrazını quraq.

2) $C = a \cap b'$

3) (A, AC) çevrəsi ilə b düz xəttinin kəsişmə nöqtəsini B ilə işarə edək.

4) Təpə nöqtələri A, B və C nöqtələri olan üçbucaq tələb olunan üçbucaqdır.

İsbatı: Birbaşa qurmalarda alınır.

Araşdırma. b düz xəttini A nöqtəsi ətrafı ətrafında $\varphi = \pm 60^0$ olmaqla, iki müxtəlif, bucaq qədərdöndərməklə onun iki müxtəlif b' və b'' obrazlarını alarıq. Məsələnin həllərinin sayı b' və b'' düz xətləri ilə a düz xəttinin kəsişməsindən alınan nöqtələrin sayına bərabər olar. Aşağıdakı hallar ola bilər.

a) a və b düz xətləri arasındakı bucaq 60^0 və 120^0-dən fərqli olduqda b' və b'' düz xətləri ilə $a$düz xəttinin iki kəsişmə nöqtəsi alınar. Deməli məsələnin yalnız iki həlli olar.

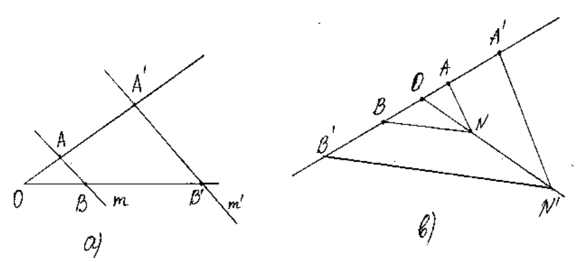
b) a və b düz xətləri arasındakı bucaq 60^0 və ya 120^0 bərabər olduqda b' və b'' düz xətlərindən biri a düz xəttini kəsəcək, digəri isə ya ona paralel olacaq, ya da onunla üst-üstə düşəcək. Birinci halda məsələnin yalnız bir həlli olur.

Oxşar çevirmənin tətbiqi ilə qurma məsələlərinin həllinə baxaq. Bu üsulun mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir: Əvvəlcə axtarılan fiqur ilə oxşar olan fiqur qurulur; sonra bu fiqurun köməyi ilə axtarılan fiqur qurulur.

Adətən bu üsul ilə qurma məsələləri həll edilərkən axtarılan fiqura homotetik olan fiqur qurulur. Bu səbəbdən də müəyyən nöqtələrin homotetiyada obrazlarını qurmaq zəruri meydana çıxır. Daha doğrusu, hələ orta məktəbdən məlum olan aşağıdakı məsələ tipində məsələləri tez-tez həll etmək lazım gəlir.

Məsələ. Mərkəzi O nöqtəsində olan homotetiyada hər hansı A nöqtəsi və onun A' obrazı verilir. Verilən B nöqtəsinin B' obrazını qurmaq tələb olunur.

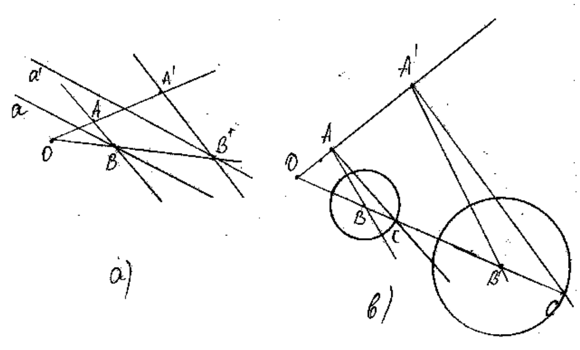
Həlli: Əvvəlcə B nöqtəsinin OA düz xətti üzərində olmayan hala baxaq. O mərkəzli homotetiyada AB düz xətti ona paralel olan m' düz xəttinə keçəcək. B' nöqtəsi m' düz xətti ilə OB düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi olacaq (Şəkil 5 a).



Şəkil 5

Əgər B nöqtəsi OA düz xətti üzərində olarsa, əvvəlcə OA düz xətti üzərində olmayan hər hansı N nöqtəsinin N' obrazını yuxarıdakı qayda ilə qururuq. Sonra isə N nöqtəsi və onun N' obrazından istifadə edib B' nöqtəsini qururuq (Şəkil 5 b).

Yuxarıdakı məsələdən istifadə edərək, hər hansı h düz xəttinin də verilən homotetiyada obrazını qura bilərik. Bunun üçün həmin düz xəttin üzərindəki ixtiyari bir nöqtənin obrazını qururuq. Sonra isə həmin nöqtədən verilən düz xəttə paralel düz xətt keçiririk (Şəkil 6 a).



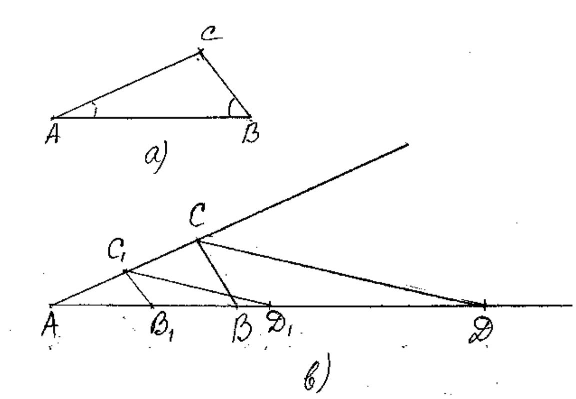
Şəkil 6

O mərkəzli iki A və A' nöqtəsi ilə verilən homotetiyada hər hansı ω çevrəsinin obrazını qurmaq üçün, bu çevrənin B mərkəzinin və hər hansı C nöqtəsinin obrazını qurmaq kifayətdir (Şəkil 6 b).

Məsələ 4. Perimetrinə və iki bucağına görə üçbucaq qurun.

Həlli: Əvvəlcə məsələnin qoyuluşunu bir qədər dəqiqləşdirək: bizdən elə bir ABC üçbucağı qurmaq tələb olunur ki, o üçbucaq $\hat{A}=\varphi, \hat{B}=\psi$ və AB+BC+AC=p şərtlərini ödəsin. Burada $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ və $\overline{p}$ qabaqcadan verilmiş fiqurlardır.

Analiz. Fərz edək ki, məsələ həll olunub və tələb olunan ABC üçbucağı qurulub. Bu üçbucaq $\angle A=\overline{\varphi}, \angle B=\overline{\psi}$ və $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\overline{p}$ şərtini ödəyir (Şəkil 7, a)



Şəkil 7

Bucaqlarından biri $\overline{\varphi}$-ə, digəri isə $\overline{\psi}$-yə bərabər olan üçbucaqların hamısı ABC üçbucağı ilə oxşar olacaq. Oxşar üçbucaqlarının tərəflərinin nisbəti isə onların perimetrlərinin nisbətinə bərabərdir. Homotetiyadan istifadə edərək, tələb olunan üçbucağı aşağıdakı kimi qura bilərik:

Qurma. 1) $\angle A = \overline{\varphi}, \angle B_1 = \overline{\psi}$ şərtini ödəyən hər hansı AB_1C_1 üçbucağını quraq.

2) AB_1C_1 üçbucağının perimetrini p_1 ilə işarə edək. AB_1 şüası üzərində $AD_1 = \overline{p}_1$ və $AD = \overline{p}$ parçalarını ayıraq.

3) A mərkəzli və D_1 nöqtəsini D nöqtəsinə keçirən homotetiyada B_1 nöqtəsinin B obrazını və C_1 nöqtəsinin C obrazını quraq.

Alınan ABC üçbucağı tələb olunandır.

İsbatı: AB_1C_1 və ABC üçbucaqları homotetikdirlər. Bu homotetiyanı h ilə, onun əmsalını isə m ilə işarə edək. $D = h(D_1), B = h(B_1), C = h(C_1)$ olduğundan $AD = m \cdot AD_1$ olar. $\hat{A} = \varphi, \hat{B} = \psi$ olması da aydındır. $AB = m \cdot AB_1$, $AC = m \cdot AC_1$, $BC = m \cdot BC_1$ olduğundan

$$AB + AC + BC = m \cdot AB_1 + m \cdot AC_1 + m \cdot B_1C_1 =$$
$$= m(AB_1 + AC_1 + B_1C_1) = m \cdot p_1 = m \cdot AD_1 = AD = p$$

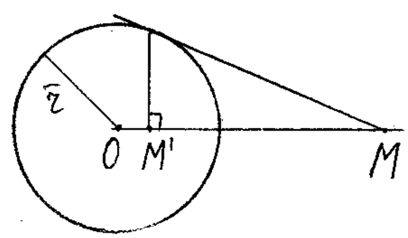
Deməli ABC tələb olunan üçbucaqdır.

Araşdırma. Əgər $\varphi + \psi < 180^0$ olarsa məsələnin həlli var və yeganədir. Əgər $\varphi + \psi \geq 180^0$ olarsa məsələnin həlli yoxdur.

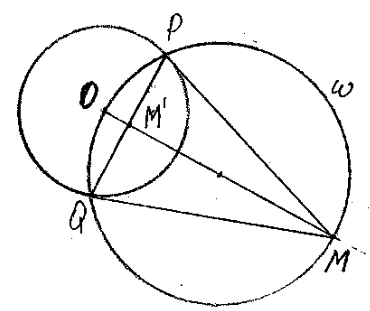
IX Mühazirə

İnversiya anlayışı. Qurma məsələlərinin inversiya metodu ilə həlli

Tutaq ki, bizə müstəvi üzərində $(O,\bar{r})$ çevrəsi verilib. Müstəvinin O nöqtəsindən fərqli bütün nöqtələri çoxluğunu E_0 ilə işarə edək. Hər bir $M \in E_0$ nöqtəsinə OM şüası üzərində yerləşən və $OM \cdot OM' = r^2$ şərtini ödəyən M' nöqtəsini qarşı qoyaq. E_0 çoxluğunun bu cür çevrilməsinə $(O,\bar{r})$ *çevrəsinə nəzərən inversiya və ya sadəcə inversiya* deyilir. (Şəkil 1)



Şəkil 1



Şəkil 2

$(O,\bar{r})$ çevrəsinə inversiya çevrəsi, O nöqtəsinə inversiyanın mərkəzi, r^2-na isə inversiyanın dərəcəsi deyilir. İnversiyanın tərifindən görünür ki, əgər inversiya zamanı M nöqtəsi M' nöqtəsinə inikas olunursa, onda M' nöqtəsi də M nöqtəsinə inikas olunur. İnversiya çevrəsi üzərində olan nöqtələr isə invariantdırlar, yəni öz-özünə inikas olunurlar. Verilən inversiyada nöqtənin obrazının qurulmasına baxaq.

Məsələ. İnversiya $(O,\bar{r})$ çevrəsi ilə verilmişdir. Verilən M nöqtəsinin bu inversiyada M' obrazını qurun.

Həlli: Əgər M nöqtəsi $(O,\bar{r})$ çevrəi üzərindədirsə onda onun obrazı elə özü olacaqdır. Əgər M nöqtəsi $(O,\bar{r})$ çevrəsi xaricində olarsa (Şəkil 2) onda OM şüası çəkək. Sonra isə diametrlərindən biri OM parçası olan ω çevrəsini quraq. ω çevrəsi ilə $(O,\bar{r})$ çevrəsinin kəsişmə nöqtələri P və Q olsun. OM düz xətti ilə PQ düz xəttinin kəsişmə nöqtəsi olan M' nöqtəsi M nöqtəsinin obrazı olacaqdır. Bunu isbat edək. MP və MQ düz xətləri $(O,\bar{r})$ çevrəsinə toxunan olduqlarından OPM və $OM'P$ bucaqları düz bucaq olacaqlar. Buradan alınır ki, $\Delta OPM' \sim \Delta OMP$ (bir iti bucaqları bərabər olan düzbucaqlı üçbucaqlar kimi). Deməli

$$\frac{OM'}{OP} = \frac{OP}{OM} \text{ və ya } OM' \cdot OM = OP^2 = r^2$$

Əgər M nöqtəsi $(O,\bar{r})$ çevrəsinin daxili nöqtəsi olarsa, yuxarıdakı qurmanı tərsinə icra etməklə M' nöqtəsini qura bilərik.

Düz xətt və çevrə kimi əsas qurma fiqurlarının inversiyada obrazlarını tapmaq üçün bizə inversiya çevirməsinin analitik ifadəsi lazım olacaq. $O\vec{i}\,\vec{j}$ düzbucaqlı koordinat sistemini elə seçək ki, koordinat başlanğıcı inversiya çevrəsinin mərkəzi ilə üst-üstə düşsün.

Fərz edək ki, $M(x,y)$ nöqtəsi E_0 çoxluğunun ixtiyari nöqtəsidir. $M'(x',y')$ isə onun obrazıdır. İnversiya çevirməsinin tərifindən görünür ki,

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM},\ \lambda > 0 \text{ və } \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = r^2$$

Bu bərabərlikdən alınır ki,

$$x' = \lambda x,\ y' = \lambda y \tag{1}$$

Skalyar hasilin tərifindən alınır ki,

$$xx' + yy' = r^2 \tag{2}$$

x' və y' dəyişənlərinin (1) münasibətlərindəki qiymətlərini (2) də yerinə yazsaq $\lambda(x^2 + y^2) = r^2$ alınır. M nöqtəsi O nöqtəsindən fərqli olduğundan $\lambda = \frac{r^2}{x^2 + y^2}$ alarıq. λ-nın bu qiymətini (1)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2},\ y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \tag{3}$$

Əgər $M'(x', y')$ nöqtəsi $M(x, y)$ nöqtəsinin obrazı isə onda inversiyanın tərifinə görə $M(x, y)$ nöqtəsi də $M'(x', y')$
nöqtəsinin obrazıdır. Onda (3) düsturlarından alarıq:

$$x = \frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2},\ y = \frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2} \tag{4}$$

İndi isə inversiyada düz xəttin obrazı haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 1. O inversiya mərkəzindən keçən düz xətt (O nöqtəsini çıxmaq şərti ilə) iversiya zamanı özünə, inversiya mərkəzindən keçməyən düz xətt isə inversiya mərkəzindən keçən çevrəyə inikas olunur.

İsbatı: İnversiya çevirməsində inversiya mərkəzindən keçən düz xəttin O nöqtəsindən fərqli nöqtələri bu düz xətt üzərində olan nöqtələrə inikas olunduğundan teoremin birinci hissəsinin isbatı aydındır. İndi fərz edək ki, düz xətt inversiya mərkəzindən keçmir. Koordinat sistemini yuxarıdakı qayda ilə seçsək, həmin düz xəttin tənliyini $Ax + By + 1 = 0$ tənliyində x və y dəyişənləri əvəzinə onların (3) ifadəsindəki qiymətlərini yazsaq

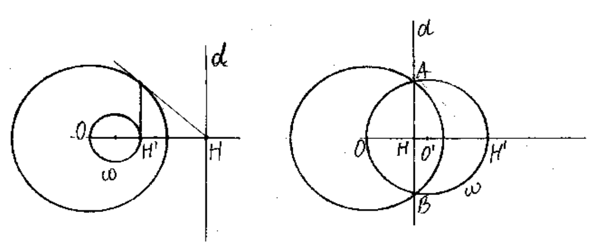
$$x'^2 + y'^2 + Ar^2 x' + Br^2 y' = 0 \tag{5}$$

çevrə tənliyi alınar. (5) tənliyində sərbəst hədd sıfır olduğundan, onun koordinat başlanğıcından keçən çevrənin tənliyi olduğu analitik həndəsə kursundan məlumdur.

Teorem isbat olundu.

Nəticə: İnversiyada, O inversiya mərkəzindən keçməyən d düz xətti (C, r) çevrəsinə inikas olunursa, onda
OC düz xəttiilə d düz xətti qarşılıqlı perpendikulyardırlar.

İsbatı: (C, r) çevrəsinin (5) tənliyindən onun mərkəzinin koordinatlarını tapa bilərik. $C\left(-\frac{Ar^2}{2}, -\frac{Br^2}{2}\right)$ Onda $\overrightarrow{OC}\left(-\frac{Ar^2}{2}, -\frac{Br^2}{2}\right)$ vektoru d düz xəttinin $\vec{n}(A, B)$ normal vektoru ilə



kollienardır. Deməli OC düz xətti d düz xəttinə perpendikulyardır. Nəticə isbat olundu.

a) b)

Şəkil 3

Bu nəticədən istifadə edərək, inversiya çevirməsində d düz xəttinin obrazını asanlıqla qurmaq olar. Əgər d düz xətti O inversiya mərkəzindən keçirsə onda onun obrazı elə özü olacaqdır. Əgər d düz xətti O inversiya mərkəzindən keçmirsə, onun obrazını aşağıdakı kimi qurmaq olar. O nöqtəsindən d düz xəttinə OH perpendikulyarını endirək. H nöqtəsinin $(O,\bar{r})$ çevrəsinə nəzərən inversiyada H' obrazını quraq. Diametrlərdən biri OH' olan ω d düz xəttinin obrazı olacaq.

(Şəkil 3, a) halında d düz xətti γ inversiya çevrəsini kəsmir, b) halında kəsir.

Teorem 2. $(O,\bar{r})$çevrəsinə nəzərən inversiyada O mərkəzindən keçən çevrə (O nöqtəsini çıxmaq şərti ilə) inversiya mərkəzindən keçməyən d düz xəttinə inikas olunur. O inversiya mərkəzindən keçməyən çevrə isə, O mərkəzindən keçməyən çevrəyə inikas olunur. O nöqtəsi həmin çevrələrin mərkəzlərini birləşdirəndüz xəttin üzərində olur.

İsbatı: Tutaq ki,

$$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0 \qquad (6)$$

başlanğıcı O inversiya mərkəzində olan $O\vec{i}\,\vec{j}$ koordinat sistemində hər hansı ω çevrəsinin tənliyidir. Bu tənlikdə x və y dəyişənlərinin yerinə onların

(4) bərabərliklərindəki ifadələrini yazsaq, onda ω çevrəsinin ω' obrazının tənliyini alarıq.

$$\left(\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\frac{Ar^2x'}{x'^2+y'^2}+\frac{Br^2y'}{x'^2+y'^2}+C=0$$

və ya

$$\frac{r^4\left(x'^2+y'^2\right)}{\left(x'^2+y'^2\right)^2}+\frac{Ar^2x'+Br^2y'}{x'^2+y'^2}+C=0$$

Buradan isə

$$C\left(x'^2+y'^2\right)+Ar^2x'+Br^2y'+r^4=0 \qquad (7)$$

tənliyi alınar. Əgər ω çevrəsi koordinat başlanğıcından keçərsə, onda onun O nöqtəsindən fərqli olan bütün nöqtələri üçün C=0 olduğundan, bu çevrə $Ar^2x'+Br^2y'+r^4=0$ düz xəttinə inikas olunar. Əgər ω çevrəsi koordinat başlanğıcından keçmirsə onda onun ω' obrazının tənliyi (7) tənliyi olacaqdır. (7) tənliyi isə çevrənin tənliyidir. (6) və (7) tənliklərindən ω və ω' çevrələrinin uyğun olaraq $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ və $\left(-\frac{Ar^2}{2C},-\frac{Br^2}{2C}\right)$ mərkəzlərini tapa bilərik. Bu nöqtələr və $O(0,0)$ nöqtəsi $Bx-Ay=0$ tənliyi ilə verilən düz xəttin üzərindədirlər. Teorem isbat olundu.

Teorem 3. Tutaq ki, bizə ω_1 və ω_2 kimi iki fiqur verilmişdir. Belə ki, ω_1 ya düz xətt, ya da ki, çevrədir. ω_2-isə çevrədir. Əgər ω_1 və ω_2 hər hansı M nöqtəsində (M nöqtəsi O inversiya mərkəzindən fərqli nöqtədir) bir-birinə toxunarlarsa, onda onların ω_1' və ω_2' obrazları da M nöqtəsinin obrazı olan M' nöqtəsində bir-birinə toxunarlar.

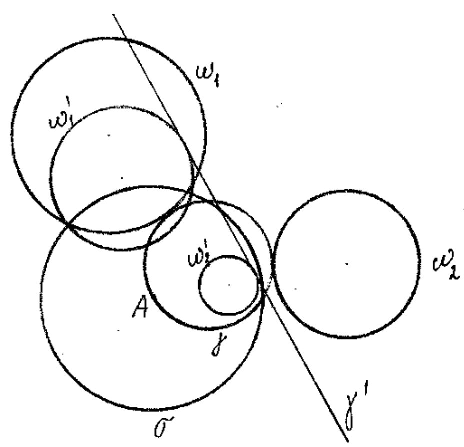
İsbatı: ω_1 və ω_2 fiqurlarının hər ikisi inversiya mərkəzindən keçmir. Deməli, əgər onlar toxunurlarsa, onların obrazlarının da bir ortaq nöqtəsi olar. ω_1 və ω_2 fiqurlarının obrazlarının ortaq nöqtəsi onların toxunma nöqtəsinin obrazı olacaq. Həmin nöqtə inversiya mərkəzi ola bilməz. Deməli ω_1' və ω_2' fiqurları da toxunarlar. Teorem isbat olundu.

İsbat etdiyimiz üç teorem inversiyanın vasitəsi ilə qurma məsələlərinin həllində mühüm rol oynayır.

Məsələ. İki çevrə və bu çevrələr üzərində olmayan nöqtə verilmişdir. Verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş çevrələrə toxunan çevrəni qurun.

Həlli:

Analiz. Fərz edək ki, verilən A nöqtəsindən keçən, verilən ω_1 və ω_2 çevrələrinə toxunan γ çevrəsini qurmuşuq. (Şəkil 4). Mərkəzi A nöqtəsində olan ixtiyari σ çevrəsini çəkək. σ çevrəsinə nəzərən inversiya çevirməsinə baxaq. A nöqtəsi inversiya mərkəzi olduğundan, onun obrazı olmayacaq. γ çevrəsinin obrazı inversiya mərkəzindən keçməyən γ' düz xətti olacaq. ω_1 çevrəsinin obrazı ω_1' çevrəsi və ω_2 çevrəsinin obrazı ω_2' çevrəsi olar. γ' düz xətti həm ω_1' həmdə ω_2' çevrəsinə toxunar (teorem 3-ə görə). Bu dediklərimizə əsasən aşağıdakı qurmaları aparmaq olar.



Şəkil 4

Qurma: 1) Mərkəzi A nöqtəsində olan ixtiyari σ çevrəsini quraq.

2) σ çevrəsinə nəzərən inversiyada ω_1 çevrəsinin ω_1' obrazını quraq.

3) σ çevrəsinə nəzərən inversiyada ω_2 çevrəsinin ω_2' obrazını quraq.

4) ω_1' və ω_2' çevrələrinin elə ortaq γ' toxunanını çəkək ki, o A nöqtəsindən keçəməsin.

5) σ çevrəsinə nəzərən γ' düz xəttinin γ obrazını quraq (γ' toxunanı A nöqtəsindən keçmədiyi üçün onun obrazı çevrə olacaq). γ tələb olunan çevrə olar.

İsbatı: γ çevrəsinin ω_1 və ω_2 çevrələrinə toxunan olduğu 3-cü teoremdən alınır. γ' düz xətti inversiya mərkəzindən keçmədiyi üçün onun γ obrazı inversiya mərkəzi A-dan keçəcək.

Araşdırma: Əgər ω_1 və ω_2 çevrələrinin biri digərinin daxilində yerləşirsə və toxunmurlarsa onda ω_1' və ω_2' çevrələri də toxunmurlar və biri digərinin daxili oblastında yerləşir. Bu halda məsələnin həlli yoxdur. Əgər ω_1 və ω_2 çevrələri bir-birinə daxildən toxunurlarsa bu halda A nöqtəsi çevrələrin xarici oblastındadırsa məsələnin sonsuz sayda həlli var. A nöqtəsi çevrələrin ω_1 və ω_2 çevrəsinin xaricindədirsə və ya kəsişirlərsə, A nöqtəsi həmin çevrələrin xaricindədirsə, bu halda məsələnin həllərinin sayı ω_1' və ω_2' çevrələrinin kəsişmə nöqtələrinin sayına bərabərdir.

Mühazirə 10

EVKLİDİN "ƏSASLAR" ƏSƏRİ. V POSTULAT VƏ ONA EKVİVALENT OLAN TƏKLİFLƏR

Həndəyə dair ilk anlayışlar qədim Misirdə, Çində, Babilistanda meydana gəlsə də, həndəsənin bir elm kimi inkişafı yunan riyaziyyatçıları tərəfindən həyata keçirilmişdir. Yunan riyaziyyatçı alimlərindən Fales, Pifaqor, Demokrit, Arximed,

Yevdoks və s. qeyd edə bilərik. Həndəsi biliklərin bir sistem formasında cəmləşdirilməsi ilə bir çox yunan riyaziyyatçıları məşğul olsa da yalnız Evkilidin
“Əsaslar”əsəri dövrümüzə qədər gəlib çatmışdir. Bu əsər 13 hissədən, yaxud 13 kitabdan ibarətdir. Hər bir kitab anlayışların daxil edilməsi ilə başlanır. I
kitabda 23 anlayış verilmişdir. Onlardan bir neçəsini qeyd edək.

1) Nöqtə hissələri olmayandır.
2) Xətt eni olmayan uzunluqdur.
3) Xəttin ucları nöqtələrdir.
4) Düz xətt üzərindəki bütün nöqtələrinə nəzərən eyni vəziyyətdə olan xətdir.

Anlayışlardan sonra isbatsız qəbul olunan təkliflər, daha doğrusu postulatlar və aksiomlar verilmişdir. I kitabda beş postulat daxil edilmişdir. Onları qeyd edək:

1) Tələb edilir ki, hər bir nöqtədən digər nöqtəyə düz xətt keçirmək olsun.
2) Və hər duz xətti qeyri-məhdud olaraq uzatmaq olsun.
3) Və istənilən mərkəzdən ixtiyari radiuslu çevrə çəkmək olsun.
4) Və bütün düzbucaqlar bərabər olsun.
5) Və düz xətt digər iki düz xətti kəsdikdə cəmi 2d-dən kiçik olan daxili birtərəfli bucaqlar əmələ gətirirsə, onda verilmiş iki düz xətt cəmi 2d-dən kiçik olan daxili birtərəfli bucaqların yerləşdiyi tərəfdə kəsilmiş olsunlar.

I kitabda Evkilid 9 aksiom daxil etmişdir. Onlardan bir neçəsini qeyd edək:

1. Üçüncüyə bərabər olanlar öz aralarında bərabərdirlər.
2. Bərabər olanlara bərabər olanları əlavə etdikdə bərabər olanlar alınır.
3. Bərabər olanlardan bərabər olanları çıxdıqda bərabər olanlar alınır.

və s.

Anlayış, postulat və aksiomlardan sonra Evkilid həndəsi faktları sadədən mürəkkəbə doğru sistemlik prinsipinə əməl etməklə daxil etmişdir.

Riyaziyyatın inkişafının indiki səviyyəsi baxımından “Əsaslar” əsəri mükəmməl sayıla bilməz. Məsələn, anlayışların verilməsi zamanı izahı əvvəlcədən daxil edilməyən terminlərdən istifadə olunmuşdur. Digər tərəfdən Evkilidin bir çox müasirləri “Əsaslar” əsərini tənqid etmişlər. Məsələn,müyyən olunmuşdur ki, IV postulat özündən əvvəl gələn postulatların və digər həndəsi faktların köməyi ilə isbat olunur. Bir çox alimlər V postulatın da isbat oluna bilməsi fikrini irəli sürmüş, buna cəhdlər göstərmişlər. Bu istiqamətdə tətqiqatlar təqribən 2000 illik dövrü əhatə etmişdir. Bu alimlərdən Sakkeri, Lejandr, Paş, Ö.Xəyyam, görkəmli Azərbaycan riyaziyyatçısı, astronomu N.Tusini qeyd etmək olar. N.Tusi “Əsaslar” əsərinə dair tədqiqatlarının nəticələrini “Təhriri-Öqlidis” əsərində təqdim etmişdir. Bu əsərdə N.Tusi ilk dəfə V postulata ekvivalent olan aşağıdakı təklifi daxil etmişdir:

Üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 2d-yə bərabərdir.

V postulata ekvivalent olan digər postulat isə paralel düz xətlərlə bağlıdır:

Düz xətt üzərində olmayan nöqtədən bu düz xəttə bir və yalnız bir düz xətt keçirmək olar.

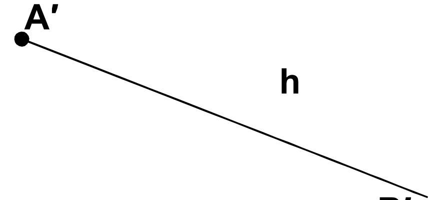
V postulatla bağlı aparılan tədqiqatlar gözlənilən nəticəni verməsə də, ümumilikdə, həndəsənin inkişafına geniş təkan vermişdir. V postulat problemi rus riyaziyyatçısı N.İ.Lobaçevski tərəfindən həll olunmuşdur. O, 1829-cu ildə “Həndəsənin əsaslarına dair” adlı elmi məqalə dərc etmişdir və göstərmişdir ki, V postulat qalan postulatlardan asılı deyil. Ona görə də bu postulatı onu inkar edən təkliflə əvəz etdikdə keyfiyyətcə yeni bir həndəsə alınır. Lobaçevski yeni həndəsəni təsəvvür olunan həndəsə adlandırmışdır. Lobaçevskinin fikir və ideyalarına oxşar olan nəticələr

Qauss və macar riyaziyyarçısı Yanoş Bolyai tərəfindən də irəli sürülmüşdür. Hal-hazırda bu üç alim, yəni Lobaçevski, Qauss və Bolyai qeyri-Evkilid həndəsəsinin yaradıcıları hesab olunurlar.

Mühazirə 2
HİLBERT AKSİOMATİKASI

Hilbert sistemini III qrup aksiomları ***"bərabərdir"*** əsas münasibəti ilə yaranan əlaqələri ifadə edir. Nəzərdə tutulur ki, hər hansı parça digər parça ilə və hər hansı bucaq digər bucaq ilə məlum münasibətdə ola bilər. Bu münasibət ***"bərabərdir"*** münasibətidir. **AB** parçası **A′B′** parçasına bərabər olduqda **AB=A′B′** simvolik yazılışından istifadə olunur. Bərabərlik aksiomlarını qeyd edək:

III$_1$ – Tutaq ki, hər hansı **AB** parçası və A′ nöqtəsindən çıxan ixtiyari h şüası verilmişdir. Onda h şüası üzərində elə yeganə **B′** nöqtəsi vardır ki, **AB=A′B′**.

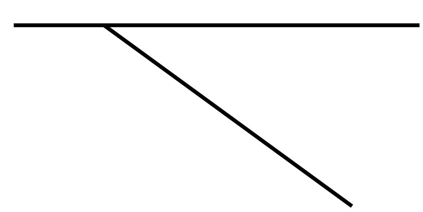


III$_2$ – Əgər **AB=A′B′, AB=A″B″** olarsa, onda **A′B′ = A″B″**.

III$_3$ – Tutaq ki, **A – B – C** və **A′ - B′ - C′**. Əgər **AB=A′B′, BC=B′C′** olarsa, onda **AC=A′C′**.

Tutaq ki, bizə hər hansı **O** nöqtəsindən çıxan **h** şüası verilib. **h** şüasını öz üzərində saxlayan düz xətti **h$^-$** ilə işarə edək. Sərhədi **h$^-$** düz xətti olan yarımmüstəvilərdən hər hansı birini **λ** ilə işarə edək. **(O, h, λ)** üçlüyünə ***bayraq*** deyəcəyik.

III$_4$ – Tutaq ki, ixtiyari **∠(h, k)**

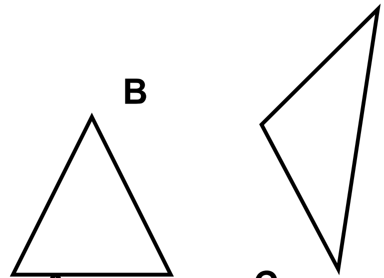


və **(O′, h′, λ′)** bayrağı verilmişdir.

Onda **λ′** yarımmüstəvisində **O′** nöqtəsindən

çıxan elə yeganə **k′** şüası vardır ki, **(h, k)=(h′, k′)**.

III₅ – Tutaq ki, A, B, C – bir düz xəttə aid olmayan hər hansı 3 nöqtədir. Eyni zamanda **A′, B′, C′** nöqtələri də bu düz xəttə aid olmayan nöqtələrdir.



əgər **AB=A′B′, AC=A′C′, ∠BAC=∠B′A′C′** olarsa, onda **∠ABC=∠A′B′C′.**

Hilbert sisteminin I – III qrup aksiomları vasitəsilə bir sıra yeni anlayışlar daxil edilir

- 3 -

1) Parçalar çoxluğunda parçaların bərabərliyi münasibəti oxşar münasibətdir.

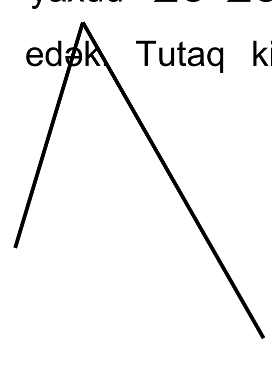
2) Bərabəryanlı üçbucaqda oturacağa bitişik bucaqlar bərabərdir. Hilbertə görə əgər verilmiş **ABC və A′B′C′** üçbucaqları üçün **AB=A′B′, AC=A′C′, BC=B′C′, ∠A=∠A′, ∠B=∠B′ və ∠C=∠C′** olarsa, belə üçbucaqlara ***bərabər üçbucaqlar*** deyilir. **△ABC=△A′B′C′.**

3) Üçbucaqların bərabərlik əlamətləri. Onlardan birini qeyd edək:

İki uyğun tərəfi və onlar arasındakı bucağı bərabər olan üçbucaqlar bərabərdir.

İsbatı: Göstərək ki, əgər verilmiş **△ABC və △ A′B′C′** üçbucaqları **AB=A′B′, AC= A′C′** və **∠A=∠A′** şərtlərini ödəyirlərsə, onda **△ABC=△A′B′C′.** Verilənlərə görə **∠BAC=∠B′A′C′.** Onda III$_5$ aksiomuna görə **∠ABC=∠A′B′C′** və ya **∠B=∠B′.** Digər tərəfdən **∠CAB=∠C′A′B′** olduğuna görə III$_5$ aksiomunu nəzərə almaqla **A′C′B′=∠ACB**, yaxud **∠C=∠C′** nəticəsinə gəlirik. Göstərək ki, **BC=B′C′.** Əksini fərz edək. Tutaq ki,

B′



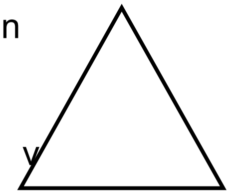
BC≠B′C′. Onda III$_1$ - ə görə **B′C′**

şüası üzərində ∃**D′** nöqtəsi vardır ki,

B′D′=BC. Aşkardır ki, **A′C′ və A′D′** **B**

şüaları üst – üstə düşmürlər.Digər tərəfdən **A′**

C′



AB=A′B′, **BC=B′D′** v **∠ABC=∠A′B′D′.**

D′

Onda III$_5$ - ə əsasən **∠BAC=∠B′A′D′.**

Bu isə **∠BAC=∠B′A′C′** şərti ilə **A** **C**

ziddiyyət təşkil edir. Beləliklə, əks fərziyyə doğru deyil. **BC= B′C′,** yaxud, **△ABC=△A′B′C′.**

4) Bucaqlar çoxluğunda bucaqların bərabərliyi münasibəti oxşar münasibətdir.

Bucağın qonşu bucağı anlayışı daxil edilir və bunun əsasında düz bucaq təyin edilir.

Belə ki, özünə qonşu olan bucağa bərabər olan bucaq ***düz bucaq*** adlanır.

5) Üçbucağın xarici bucağı onunla qonşu olmayan daxili bucaqların hər birindən böyükdür

- 4 -

6) Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf durur və tərsinə. Parçanın orta nöqtəsi və bucağın tənböləni anlayışı daxil edilir.

7) Hər bir parçanın yeganə orta nöqtəsi var.

8) Hər bir bucağın yeganə tənböləni var.

Hilbert sisteminin IV qrup aksiomları dedikdə Arximed və Kantor aksiomları nəzərdə tutulur. Bu aksiomları qeyd edək:

IV$_1$ (Arximed) – Tutaq ki, hər hansı **AB** və **CD** parçaları verilib. Onda aşağıdakı şərtləri ödəyən **A_1, ... , A_n** nöqtələri çoxluğu vardır.:

1) **$A – A_1 – A_2$; $A_1 – A_2 – A_3$; ... ; $A_{n-2} – A_{n-1} – A_n$**

2) **$AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n$**

3) **$A – B – A_n$**

IV_2 (Kantor) – Tutaq ki, **a** düz xətti üzərində **A_1B_1; A_2B_2; ... ;** parçalar ardıcıllığı verilmişdir ki, onlardan hər sonra gələn özündən əvvəlki parçaya daxildir, eyni zamanda, $\forall$**CD** parçası üçün $\exists$**n** nömrəsi vardır ki, **$A_nB_n < CD$.** Onda verilmiş parçalar ardıcıllığının hər bir parçasına daxil olan **M** nöqtəsi vardır. Göstərmək olur ki, aksiomda qeyd olunan **M** nöqtəsi yeganədir. Digər tərəfdən Hilbert sisteminin IV qrup aksiomları həmin sistemin I – III qrup aksiomlarının ödənilməsi şərti daxilində ***Dedekin prinsipi*** adlanan aşağıdakı təklifə ekvivalentdirlər.

Təklif (Dedekin prinsipi):

Tutaq ki, **AB** parçasının **k_1** və **k_2** siniflərinə aşağıdakı bölgü verilib:

($AB = K_1 \cup K_2$ $\quad$ $K_1 \cap K_2 = \varnothing$)

1) **$A \in K_1$; $B \in K_2$; K_1 və K_2** siniflərində **A** – dan və **B** – dən fərqli nöqtələr var.

2) **K_1** sinfinə aid olan hər bir nöqtə **A** nöqtəsi ilə **K_2** sinfinə aid olan $\forall$ nöqtə arasında yerləşir. Onda **AB** parçasına daxil olan $\exists$**M_0** nöqtəsi vardır ki, **A** ilə **M_0** arasındakı hər bir nöqtə **K_1** sinfinə, **M_0** ilə **B** arasındakı hər bir nöqtə **K_2** sinfinə daxildir. **K_1** və **K_2** – yə ***Dedekin kəsikləri*** deyilir. **M_0** – a isə ***onları ayıran nöqtə*** deyilir.

Mühazirə 12

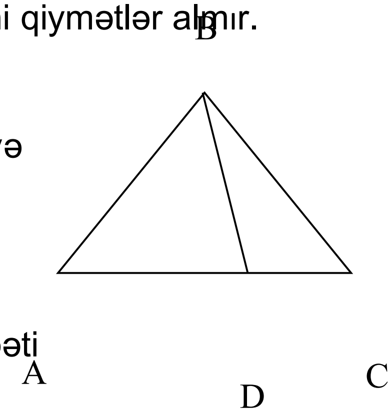
Lobaçevski aksiomu. Lobaçevski həndəsəsinin bəzi faktları

Mütləq həndəsəyə aid bütün teoremlər Lobaçevski həndəsəsində də doğrudur. Deyilənlər üçbucaqların və dördbucaqların xassələrinə də aiddir. Lakin üçbucaqların və dördbucaqların V^* Lobaçevski aksiomu ilə bağlı olan elə xassələri də vardır ki, bunlar yalnız Lobaçevski həndəsəsində doğrudur. Belə xassələrdən bəzilərini öyrənək.

Teorem 1: Lobaçevski həndəsəsində hər bir üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 2d – dən kiçikdir. Burada, d – düz bucağın kəmiyyətidir.

İsbatı: Teoremin isbatında mütləq həndəsəyə aid olan Sakkeri – Lejandrın I teoreminə əsaslanırıq. Həmin teoremdə qeyd olunur ki, mütləq həndəsədə hər bir üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 2d – dən böyük deyil. Əksini fərz edək. Tutaq ki, Lobaçevski müstəvisində elə ABC vardır ki, $\sigma_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C = 2d$. Digər tərəfdən üçbucağın daxili bucaqlarının cəminin 2d – yə olması təklifi V postulata və ya Hilbert sisteminin V paralellik aksiomuna ekvivalentdir. V və V^* aksiomları eyni vaxtda doğru ola bilməz. Alınmış ziddiyyət onu göstərir ki, əks fərziyyə doğru deyil, yəni Lobaçevski müstəvisində ixtiyari üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 2d – dən kiçikdir. Teorem isbat olundu.

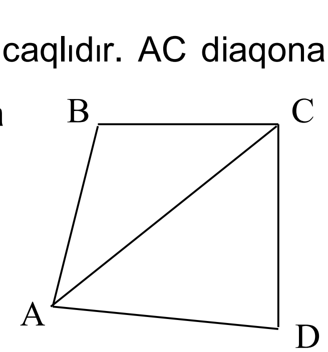
Nəticə: Lobaçevski həndəsəsində üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi sabit kəmiyyət olmayıb, müxtəlif üçbucaqlar üçün eyni qiymətlər almır.



Bunu aydınlaşdırmaq üçün hər hansı ABC üçbucağını götürək və BD parçası ilə onu ABD və BDC üçbucaqlarına ayıraq. Aşkardır ki, $\sigma_{ABC} = \sigma_{ABD} + \sigma_{BDC} = 2d$. Teorem 1 – ə görə $\sigma_{BDC} - 2d < 0$ münasibəti doğrudur. Bu münasibəti nəzərə alsaq, müəyyən etmiş olarıq ki, $\sigma_{ABC} < \sigma_{ABD}$. Bu isə nəticənin doğru olması deməkdir.

Teorem 2: Lobaçevski həndəsəsində hər bir qabarıq dördbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi 4d – dən kiçikdir.

İsbatı: Tutaq ki, ABCD hər hansı qabarıq dördbucaqlıdır. AC diaqonalı ilə ABCD dördbucaqlısını ABC ilə ACD üçbucaqlarına ayıraq. Onda



$\sigma_{ABCD} = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \sigma_{ABC} + \sigma_{ACD}$.

Teorem 1 – ə görə $\sigma_{ABC} < 2d$, $\sigma_{ACD} < 2d$.

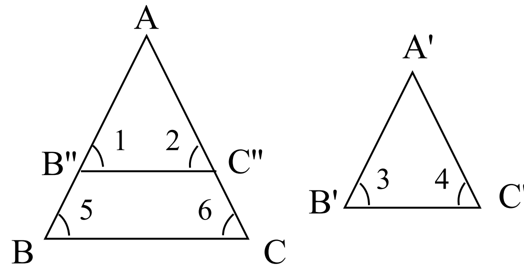
Bu isə o deməkdir ki,

$\sigma_{ABCD} = \sigma_{ABC} + \sigma_{ACD} < 2d + 2d = 4d$.

Teorem isbat olundu.

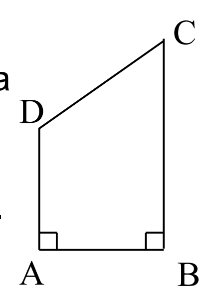
Teorem 3: Əgər ABC və A'B'C' üçbucaqlarının uyğun bucaqları bərabərdirsə, onda bu üçbucaqlar bərabərdir.

İsbatı: Teoremin şərtinə görə $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Göstərək ki, AB = A'B'. Əksini fərz edək, müəyyənlik üçün fərz edək ki, AB > A'B'. Bu şərtlər daxilində AB və AC şüaları üzərində uyğun olaraq, AB'' = A'B' və AC'' = A'C' götürək. Üçbucaqların bərabərliyinin I əlamətinə görə ∆AB''C'' = ∆A'B'C'. Bu o deməkdir ki, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Digər tərəfdən, $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$. Bu münasibətlərdən alırıq ki, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$. Aşkardır ki, B'' nöqtəsi AB parçasının daxili nöqtəsidir. Yəni, A – B'' – B. Tusi – Paş aksiomuna görə B''C'' düz xətti ABC üçbucağının AC və BC tərəflərindən birini kəsməlidir. Həmin düz xətt BC tərəfini kəsə bilməz. Əks halda üçbucağın xarici bucağına dair teoremlə ziddiyyət alınardı. Bu isə o deməkdir ki, C'' nöqtəsi AC tərəfinin daxili nöqtəsidir, yəni A – C'' – C. Beləliklə, BB''C''C dördbucaqlısı qabarıq dördbucaqlıdır. Bu dördbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini hesablayaq: $\sigma_{BB''C''C} = 2d + 2d = 4d$. Bu nəticə Teorem 2 ilə ziddiyyət təşkil edir və AB = A'B'. Buradan üçbucaqların bərabərliyinin II əlamətinə görə ∆ABC = ∆A'B'C'. Teorem isbat olundu.



Nəticə: Lobaçevski müstəvisində oxşar üçbucaqlar yoxdur.

Lobaçevski müstəvisində elə ABCD qabarıq dördbucaqlısına baxaq ki, A və B təpələrindəki daxili bucaqlar düz bucaqlar olsun. Bu halda ABCD dördbucaqlısına ikidüzbucaqlı deyilir. AB tərəfi ikidüzbucaqlının oturacağı, BC və AD tərəfləri isə onun yan tərəfləri adlanır. Yan tərəfləri bir – birinə bərabər

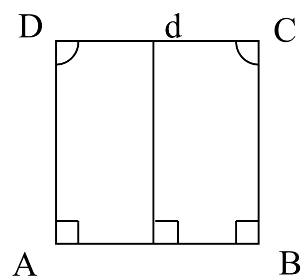


olan ikidüzbucaqlıya Tusi – Sakkeri dördbucaqlısı deyilir.

Aşağıdakı teoremləri qeyd edək.

Teorem 4: Tutaq ki, ABCD oturacağı AB olan Tusi – Sakkeri dördbucaqlısıdır. Onda $\angle$D və $\angle$C bucaqları bərabərdir və onlardan hər biri iti bucaqdır.

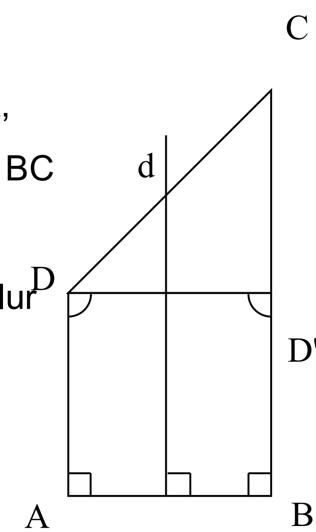
İsbatı: AB oturacağının d orta perpendikulyarını çəkək və bu perpendikulyara nəzərən simmetriyaya baxaq. Qeyd olunan simmetriyada A nöqtəsi B nöqtəsinə, AD isə BC – yə keçir. Bu isə o deməkdir, D nöqtəsi də C – yə çevrilir. Başqa sözlə, $\angle$ADC = $\angle$BCD və ya $\angle$D = $\angle$C. ABCD Tusi – Sakkeri dördbucaqlısının daxili bucaqlarının cəmini hesablayaq və bu zaman Teorem 2 – ni nəzərə alaq:



$\sigma_{ABCD} = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2d + 2\angle C < 4d \Rightarrow 2\angle C < 2d \Rightarrow \angle C < d$ və $\angle C < d$.

Xassə 1: Tutaq ki, ABCD oturacağı AB olan ikidüzbucaqlıdır. Əgər AD < BC olarsa, onda $\angle$ADC < $\angle$BCD olacaqdır.

İsbatı: AB oturacağının d orta perpendikulyarını çəkək, d düz xəttinə nəzərən simmetriyaya baxaq. D nöqtəsi BC tərəfinin müəyyən D nöqtəsinə çevrilir, yəni AD < BC və AD = BD' olduğundan B – D' – C. Buradan aydın olur ki, ABD'D Tusi – Sakkeri dördbucaqlısıdır. Alırıq ki, $\angle$1 = $\angle$2. Lakin $\angle$ADC > $\angle$1. Eyni zamanda, $\angle$2 > $\angle$BCD. Bu münasibətlərdən müəyyən edirik ki, $\angle$ADC < $\angle$BCD



Mühazirə 13

Riyazi strukturlar

Müasir aksiomatik metodun əsası alman riyaziyyatçısı David Hilbert tərəfindən qoyulmuşdur. Aksiomatik metod riyazi struktur anlayışı ilə sıx surətdə bağlıdır. Fərz edək ki, bizə boş olmayan $M_1, M_2, \dots, M_n$ çoxluqları verilmişdir. Bu çoxluqların $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ dekart hasilini təyin edək. $\Delta \subset M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ alt çoxluqlarına $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ çoxluqları üzərində təyin olunmuş n-ar münasibəti deyilir. n=2 olduqda binar münasibəti, n=3 olduqda isə ternar münasibəti təyin olunur. Əgər $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$ olarsa, onda $\Delta \subset M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = M^n$ alt çoxluğu M çoxluğu üzərində təyin olunmuş n-ar münasibəti adlandırılır. Göstərmək olar ki, hər bir inikas müəyyən münasibətlə əlaqədardır. Bununla bağlı bəzi misallara baxaq.

1.Hər hansı $f : X \to Y$ inikasını nəzərdən keçirək. Burada X, Y boş olmayan çoxluqlardır və $\forall x \in X$ elementinə müəyyən qayda ilə yeganə $f(x) \in Y$ elementi qarşı qoyulur. x elementi X-dan olmaqla bütün f(x) obrazları çoxluğunu f(X) ilə işarə edək. $X \times f(X)$ hasilini təyin edək. Aşkardır ki, $X \times f(X) \subset X \times Y$. Başqa sözlə, $\Delta = X \times f(X)$ X və Y çoxluqları üzərində təyin olunmuş binar münasibətdir. Eyni zamanda Δ münasibəti elə (x, y) cütlərindən ibarətdir ki, y=f(x).

2. Boş olmayan ixtiyari E çoxluğunu götürək və daxili kompozisiya qanunu adlandırlan $\phi: E \times E \to E$ inikasını nəzərdən keçirək. φ inikası ilə $\Delta = E \times E \times E = E^3$ ternar münasibəti əlaqələndirilir. Bu halda Δ münasibəti $\exists (a,b,c)$ üçlüklərindən ibarət olur ki, $c = \phi(a,b)$.

3. E çoxluğu ilə yanaşı skalyarlar çoxluğu adlandırılan K çoxluğunun da verildiyini fərz edək. Xarici kompozisiya qanunu adlandırılan $g: K \times E \to E$ inikasını təyin edək. g inikasının multiplikativ yazılışını tətbiq edək, yəni $\forall \lambda \in K$, $\forall a \in E$ üçün $g(\lambda, a) = \lambda a = b \in E$.

g inikası ilə $\Delta \subset K \times E \times E$ ternar münasibəti əlaqələndirilir. Bu halda isə Δ elə (λ, a, b) üçlüklərindən ibarətdir ki, $b = \lambda a$.

Göründüyü kimi M_1, M_2, ...,M_n çoxluqları üzərində $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ çoxluğunun bütün alt çoxluqlarının sayı qədər münasibətlər təyin edilə bilər. Bu münasibətlərin hamısının öyrənilməsi əlverişli deyil. Lakin əvvəlcədən verilmiş xassələri ödəyən münasibətlərin tədqiqi daha məqsədəuyğundur. Sadəlik üçün boş olmayan E, F və G çoxluqlarının verildiyini fərz edək. Nəzərdə tuturuq ki, bu çoxluqlar üzərində

$$A_1, A_2, ..., A_t \quad \textbf{(1)}$$

xassələrinə malik olan Δ_1, Δ_2, ..., Δ_k münasibətləri təyin olunmuşdur.

Qeyd edək ki, eyni bir çoxluq və ya çoxluqlar üzərində eyni xassələrə malik müxtəlif münasibətlər sistemləri təyin oluna bilər. Bunu bir misal üzərində aydınlaşdıraq. Tutaq ki, R həqiqi ədədlər çoxluğu üzərində A_1-kommutativlik xassəsinə malik olan Δ münasibətinin təyin edilməsi tələb olunur. Məlumdur ki, R çoxluğunda A_1 xasəsinə malik olan iki cəbri əməl daxil edilə bilər. Δ'- toplama əməli və Δ''- vurma əməli.

E, F və G çoxluqları üzərində təyin olunmuş və (1) xassələrinə malik olan bütün $\sigma = \{\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k\}$ münasibətlər sistemi çoxluğunu T ilə işarə edək. Əgər $T \neq \emptyset$ olarsa, o halda deyirlər ki, $\sigma \in T$ münasibətlər sistemi T növlü riyazi sturuktur təyin edir. E, F və G çoxluqları riyazi strukturun bazasını əmələ gətirirlər. (1) xassələri isə riyazi strukturun aksiomları adlanırlar. Riyazi strukturlara dair nümunələrə baxaq.

1. Qrupun riyazi strukturu: Boş olmayan G çoxluğuna baxılır. Bu çoxluq baza olaraq qəbul olunur. Əsas münasibət Δ ilə işarə olunur. Aksiomlar sistemi isə aşağıdakı aksiomlardan ibarətdir.

A_1- Δ-G çoxluğunda təyin olunmuş cəbri əməldir.

A_2- Δ-assosiativ cəbri əməldir. $\Delta(\Delta(a,b),c)= \Delta(a,\Delta(b,c))$.

A_3- $\exists e \in G$ elementi vardır ki, $\forall a \in G$ üçün $\Delta(a,e)= \Delta(e,a)=a$.

A_4- $\forall a \in G$ üçün $\exists a' \in G$ elementi vardır ki, $\Delta(a,a')= \Delta(a',a)=e$.

2. Evklid fəzasının riyazi strukturu: Baza olaraq E, F və G çoxluqları götürülür. Bu çoxluqların elementləri nöqtələr, düz xətlər və müstəvilər adlandırılır. E, F və G çoxluqları üzərində daxil olma, arasında yerləşmə və bərabərdir sözləri ilə ifadə olunan Δ_1, Δ_2, Δ_3 əsas münasibətləri təyin olunur. Bu strukturun aksiomları isə Hilbert sisteminin I_1-I_8, II_1-II_4, III_1-III_5, IV_1, IV_2 və V aksiomlarından ibarətdir. Bu aksiomlar sistemini Σ_H ilə işarə edəcəyik.

3. Lobaçevski həndəsəsinin riyazi strukturu: Baza olaraq misal 2-dəki E, F və G çoxluqları götürülür. Əsas münasibətlərin də misal 2-dəki Δ_1, Δ_2, və Δ_3 münasibətlərindən ibarət olması nəzərdə tutulur. Bu riyazi strukturun aksiomları I_1-I_8, II_1-II_4, III_1-III_5, IV_1, IV_2 və V^* aksiomlarından ibarətdir. Qeyd olunan aksiomlar sistemini $\sum_\Lambda$ kimi işarə edəcəyik.

Qeyd edək ki, istənilən çoxluqda ixtiyari riyazi struktur təyin oluna bilməz. Məsələn: E={0, 1, 2, 3, 4, 5} çoxluğu üzərində n ölçülü Evklid fəzasının riyazi strukturunu təyin etmək mümkün deyil. Lakin həmin struktur $R^n=R\times R\times\ldots\times R$ çoxluğu üzərində təyin oluna bilər. Buradan aydın olur ki, $T=\emptyset$ olması aşağıdakı hallarda mümkündür.

1. Verilmiş baza T növlü riyazi strukturu təyin etməyə imkan vermir. Lakin bazanın digər seçimində riyazı strukturun təyin olunması mümkündür.

2. Riyazi strukturu təyin edə bilən baza, ümumiyyətlə, yoxdur.

İkinci halda deyirlər ki, (1) aksiomlar sistemi ziddiyyətlidir.

Tutaq ki, bizə boş olmayan M çoxluğu verilmişdir. M çoxluğu üzərində Δ_1, Δ_2, ..., Δ_k əsas münasibətlərini konkret Δ_1', Δ_2', ..., Δ_k' mənalarına malik şəkildə elə təyin edək ki, (1) aksiomlarının hamısı ödənilsin. Bu halda deyirlər ki, (1) aksiomlar sisteminin interpretasiyası qurulmuşdur. M çoxluğunun özü isə (1) aksiomlar sisteminin modeli adlanır. Buradan aydın olur ki, aksiomlar sisteminin ziddiyyətsizliyi həmin sistemin ixtiyari modelinin təyin olunmasına ekvivalentdir. Fərz edək ki, M' və M'' (1) aksiomlar sisteminin hər hansı iki modelləridir. Belə ki, M' və M" çoxluqlarında Δ_1, Δ_2, ..., Δ_k əsas münasibətlərinin uyğun olaraq Δ_1', Δ_2', ..., Δ_k' və Δ_1'', Δ_2'', ..., Δ_k'' mənaları vardır. M' və M" çoxluqlarının qarşılıqlı birqiymətli $\exists f$: M'→M" inikasına baxaq ki, bu inikas zamanı $(a, b, ..., c)\in\Delta_i'$ olmasından $(f(a), f(b), ..., f(c))\in\Delta_i''$ şərti alınsın. Bu halda deyirlər ki, M' və M" modelləri bir-biri ilə izomorf olan modellərdir. Bununla bağlı bir misal göstərək.

Tutaq ki, riyazi struktur olaraq qrup strukturu götürülmüşdür. R həqiqi ədədlərin toplamaya nəzərən additiv qrupudur. R_+^* isə müsbət həqiqi ədədlərin vurmaya nəzərən multiplikativ qrupudur. Belə bir $f : R_+^*\rightarrow R$ inikasını təyin edək. $\forall x\in R_+^*$ üçün $f(x)=\ln x$. Aşkardır ki, $\forall x,y\in R_+^*$ üçün $f(xy)=\ln(xy)=\ln x+\ln y= f(x)+f(y)$. Bu yazılış göstərir ki, R_+^* və R qrupları bir-biri ilə izomorfdurlar.